Organización, descripción y análisis de datos. Estudio socioepistemológico

Tabla de contenido

ORGANIZACIÓN, DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO 1

ESTRUCTURA Y PRESENTACIÓN 4

1. INTRODUCCIÓN Y PARTE I: LÍNEA RECTA (9 TAREAS) 5

HIPÓTESIS DIDÁCTICA: 5
DESCRIPCIÓN GENERAL: 5
DESCRIPCIÓN PARTICULAR: 5
Equipo A: *5*
Equipo B: *6*
Equipo C: *6*
PARTE I: LÍNEA RECTA (9 TAREAS) 6
HIPÓTESIS DIDÁCTICA: 6
DESCRIPCIÓN GENERAL: 7
DESCRIPCIÓN PARTICULAR: 7
Equipo A: *7*
Equipo B: *11*
Equipo C: *13*

1-1 ANÁLISIS DE PRÁCTICAS (ACCIONES Y ACTIVIDADES): INTRODUCCIÓN Y PARTE I 17

Equipo A: *17*
Equipo B: *17*
Equipo C: *17*
Equipo A: *17*
Equipo B: *22*
Equipo C: *23*

1-2 ANÁLISIS DE USOS: INTRODUCCIÓN Y PARTE I 28

2. PARTE II. RELACIÓN PUNTO-RECTA (4 TAREAS) 40

HIPÓTESIS DIDÁCTICA: 40
DESCRIPCIÓN GENERAL: 40
DESCRIPCIÓN PARTICULAR: 41
Equipo A: *41*
Equipo B: *43*
Equipo C: *43*

2-1 ANÁLISIS DE PRÁCTICAS (ACCIONES Y ACTIVIDADES): PARTE II 45

Equipo A: *45*
Equipo B: *47*
Equipo C: *47*

2-2 ANÁLISIS DE USOS: PARTE II 49

3. PARTE III. RELACIÓN RECTA-RECTA (12 TAREAS) 56

HIPÓTESIS DIDÁCTICA: 56
DESCRIPCIÓN GENERAL: 57

Descripción particular: ... 57
Equipo A: ... *57*
Equipo B: ... *61*
Equipo C: ... *64*

3-1 ANÁLISIS DE PRÁCTICAS (ACCIONES Y ACTIVIDADES): PARTE III ... 67

Equipo A: ... *67*
Equipo B: ... *71*
Equipo C: ... *73*

2-2 ANÁLISIS DE USOS: PARTE III ... 77

4. PARTE IV. UN ÁNGULO (3 TAREAS) ... 90

Hipótesis didáctica: ... 90
Descripción general: ... 90
Descripción particular: ... 90
Equipo A: ... *90*
Equipo B: ... *92*
Equipo C: ... *94*

4-1 ANÁLISIS DE PRÁCTICAS (ACCIONES Y ACTIVIDADES): PARTE IV ... 97

Equipo A: ... *97*
Equipo B: ... *98*
Equipo C: ... *100*

2-2 ANÁLISIS DE USOS: PARTE IV ... 103

5. PARTE V. DOS ÁNGULO ... 112

Hipótesis didáctica: ... 112
Descripción general: ... 112
Descripción particular: ... 112
Equipo A: ... *112*
Equipo B: ... *114*
Equipo C: ... *116*

5-1 ANÁLISIS DE PRÁCTICAS (ACCIONES Y ACTIVIDADES): PARTE V ... 120

Equipo A: ... *120*
Equipo B: ... *122*
Equipo C: ... *124*

2-2 ANÁLISIS DE USOS: PARTE V ... 128

6. PARTE VI. TRES ÁNGULOS ... 141

Hipótesis didáctica: ... 141
Descripción general: ... 142
Descripción particular: ... 143
Equipo A: ... *143*
Equipo B: ... *158*
Equipo C: ... *168*

6-1 ANÁLISIS DE PRÁCTICAS (ACCIONES Y ACTIVIDADES): PARTE VI ... 181

Equipo A: ... *181*
Equipo B: ... *196*
Equipo C: ... *207*

2-2 ANÁLISIS DE USOS: PARTE VI ... 230

ANÁLISIS TRANSVERSAL PARA LA CARACTERIZACIÓN DE PSC ... 259

ANÁLISIS TRANSVERSAL PARA LA CARACTERIZACIÓN DE USOS EN LAS PSC ... 267

La línea recta 273
El segmento 275
El ángulo 278

Estructura y presentación

Los datos sobre el desarrollo de las tareas de problematización se organizarán según las partes del diseño y según los equipos de trabajo, resaltando el trabajo individual de cada participante. Para ello, se describirá cada una de las partes del diseño, la hipótesis didáctica (lo que se esperaba lograr en esa parte), una descripción general de lo que hicieron y una descripción particular (esta se estructurará por equipos). Para este proceso del seminario, se considera como dato de investigación todo aquello que las y los participantes (de manera individual y colectiva) hacen y dicen ante una tarea, la forma en cómo lo hacen y la justificación de por qué y para qué lo hacen; esta información puede estar presente de forma escrita, icónica, corporal o verbal.

La nomenclatura utilizada será la siguiente: encuesta – E, hojas de trabajo – HT, notas del investigador-observador – NIO, notas de investigador-profesor – NIP, video – V, sesión 1 – S1, investigador profesor – IP, profesora 1 del equipo A - APa1, profesor 3 del equipo A – AP3, discusión en equipos – DE, discusión con todo el grupo-DG. Las transcripciones o citas textuales de los datos se presentarán de la siguiente forma: fuente-equipo y profesor o profesora-número de sesión[tiempo]: “transcripción o cita textual”, por ejemplo: V-APa2-S1|0:00-0:00|: “transcripción o cita textual”, las descripciones de lo que dicen o hacen tendrán la misma simbología, pero no irán entre comillas; y las descripciones contextuales o transcripciones cortas que van dentro de una cita textual se presentan entre corchetes.

1. Introducción y Parte I: Línea recta (9 tareas)

La problematización inicia con la pregunta: ¿Qué es un triángulo y qué elementos geométricos lo componen?

Hipótesis didáctica:

Reconocerán el triángulo como una figura geométrica plana delimitada por segmentos de recta, compuesta por lados, ángulos y vértices (altura, bisectriz, mediatriz).

Descripción general:

Reconocen el triángulo como una figura plana y un polígono que tiene 3 lados, 3 ángulos y 3 vértices.

Descripción particular:

Equipo A:

Caracterizan el triángulo como una figura geométrica plana y como un polígono. Por ejemplo, V-APa2-S1|0:09:15-0:08:28|: "Es una figura geométrica plana que la componen 3 ángulos, 3 lados y 3 vértices". Además, APa1 en sus HT menciona a los ángulos exteriores como elementos del triángulo; y, al igual que APa2, caracteriza al triángulo como una figura plana [*generalización euclidiana*] (ver figura 1) y AP3 agrega la propiedad de que la suma de sus ángulos internos es 180, sin agregar el signo de grados [*generalización euclidiana*] (ver figura 2).

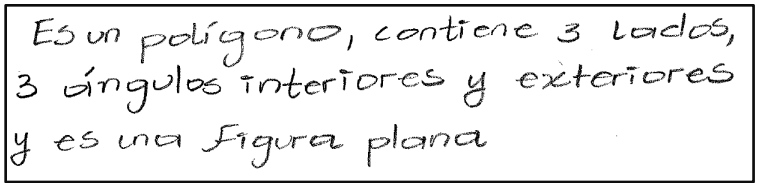


Figura1. Respuesta de APa1. Fuente: HT.

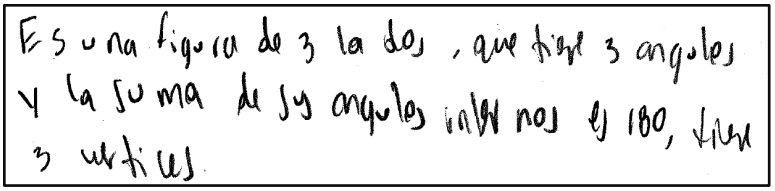


Figura 2. Respuesta de AP3. Fuente: HT.

Equipo B:

Caracterizan el triángulo en sus HT como una figura plana que tiene 3 lados, 3 ángulos y 3 vértices. No obstante, en la discusión se menciona que también es un polígono y que un polígono V-BP1-S1|0:10:03-0:10:15|: "Es una figura plana con varios lados… con n lados".

Equipo C:

Caracterizan el triángulo como una figura plana que tiene 3 lados, 3 ángulos y 3 vértices.

Parte I: Línea recta (9 tareas)

1. Trace una línea recta en una hoja de papel y caracterícela respondiendo a la siguiente pregunta ¿cuál es la o las características particulares de la línea recta que la hacen ser recta?
2. Si tenemos dos puntos en el plano, qué elementos geométrico representa la distancia más corta entre esos dos puntos?
3. Si tenemos dos puntos y queremos representar la distancia más corta entre esos dos puntos con una cuerda, ¿cómo debe estar la cuerda?
4. Dadas las características anteriores, ¿podemos trazar líneas rectas en superficies diferentes al plano?
5. ¿Cómo trazamos una línea recta en la superficie de una esfera?
6. Tracen dos puntos en la esfera y nómbrenlos A y B. Con una cuerda muestra la distancia más corta entre el punto A y el punto B. Si continuamos ese segmento de forma ilimitada (de ambos extremos), ¿qué forma tiene la representación de la línea recta en la superficie de la esfera?
7. ¿Cuántos segmentos de línea recta en la superficie de la esfera habría entre A y B (si no son opuesto y si son opuestos)?

   Al segmento más corto entre dos puntos de cualquier superficie se le llama geodésica.

8. Usando la regla esférica construyan una recta esférica que pase por A y B. ¿Toda circunferencia en la superficie de la esfera es una línea recta? (usando la cuerda prueben diferentes opciones).
9. Compare la recta en el plano y la recta en la esfera. ¿Qué características se mantienen y de qué manera se mantienen?, ¿qué características son diferentes y por qué considera que se dan estas diferencias?

Hipótesis didáctica:

Al caracterizar la recta, se asociarán a su rectitud ideas como: continúa sin cambiar de dirección (la dirección como indicativo de cómo trasladarse) y continúa de forma derecha (T1). (T2 y T3) Describirán el segmento como una cuerda tensa entre dos puntos. (T4 y T5) Pensar líneas rectas en otra superficie hará que presenten casos de rectas planas tangentes a una superficie curva, por ejemplo, una recta plana que toque a la esfera en dos puntos de la superficie o sea tangente en un punto. Trasladarán las características asociadas a la rectitud de la recta plana a representaciones en otras superficies, por ejemplo, el cubo, la esfera y el cilindro. Aunque harán referencia a la infinitud de la recta plana en la T1, se espera que en otras superficies se piense en segmentos de recta (dado que estaría poniendo en juego características independientes de la superficie). (T6)

Reconocerá lo ilimitado de la recta esférica y su representación como una circunferencia. (T7) Confrontarán la generalización de que el segmento de recta representa la distancia más corta entre dos puntos, ya que verificarán que dados dos puntos no opuestos hay dos segmentos de recta entre ellos y cuando son opuestos hay infinitos segmentos (de igual medida) entre ellos. Con la T8 se espera concluir que la representación de la recta esférica es una circunferencia máxima. Finalmente, con la T9, mantendrán la invariabilidad de la dirección en la esfera. Sobre las diferencias, podrán en discusión la infinitud de la recta plana en comparación con la ilimitación de la recta esférica y asociarán estas diferencias a la superficie en la que se está trabajando.

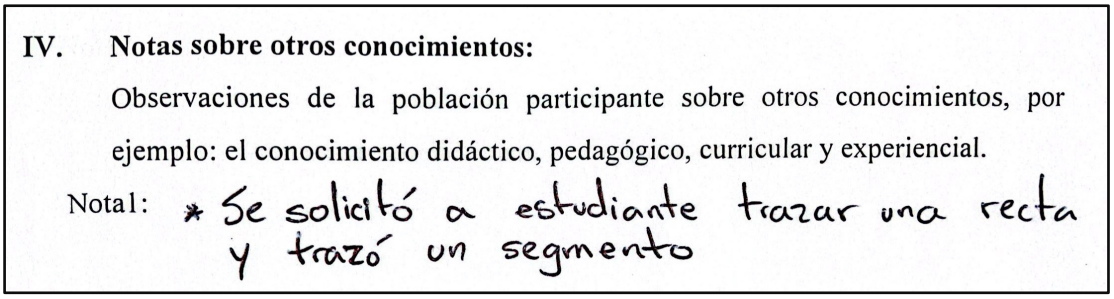
Descripción general:

Trazan la línea recta en una hoja de papel y asocian a su rectitud características como que no cambia de dirección y es una sucesión de infinitos puntos colineales. Aceptan que la distancia más corta entre dos puntos se puede representar con una cuerda tensa. Al llevarse esas ideas a la esfera, logran describir a la línea recta como una circunferencia máxima; además, reconocen que, en dos puntos opuestos sobre la esfera, hay infinitas geodésicas entre ellos y, si no son opuestos, hay dos segmentos y solo uno de ellos es geodésica. Al comparar las dos representaciones de rectas, reconocen que en ambas se pueden tensar cuerdas y ambas dividen su superficie en dos partes; sus diferencias las asocian a las notables diferencias de superficies.

Descripción particular:

Equipo A:

(T1) En la discusión en equipo, la APa1 menciona que V-APa1-S1|0:15:06-0:15:30|: “Una vez que usted empieza a trazar, tiene la misma dirección. Por ejemplo, aquí, cuando lo hice, si se fija, empecé a trazar así. Bueno, este es un segmento; eso es lo que la hace, para mí, recta”, esto fue una de las notas del investigador-observador (ver figura 3). Por su parte, APa2 menciona V-APa2-S1|0:15:32-0:15:30|: “Una sucesión de infinitos puntos colineales y dos puntos definen una recta”. De ahí, APa1 reconoce que la unión de las dos son esas características, y APa2 agrega V-APa2-S1|0:15:59-0:16:03|: “Tiene la misma dirección; si no, no sería línea recta”. Por su parte, V-AP3-S1|0:16:46-0:17:00|: “Para mí, dos puntos definen una línea recta”; luego discuten que, si se tienen tres puntos, deben ser colineales. El IP discute con el equipo sobre la posibilidad de unir esos dos puntos con líneas curvas, entonces el V-AP3-S1|0:18:06-0:18:10|: “Creo que entonces está mejor la de ellas [refiere a APa2], que son infinitos puntos colineales”.

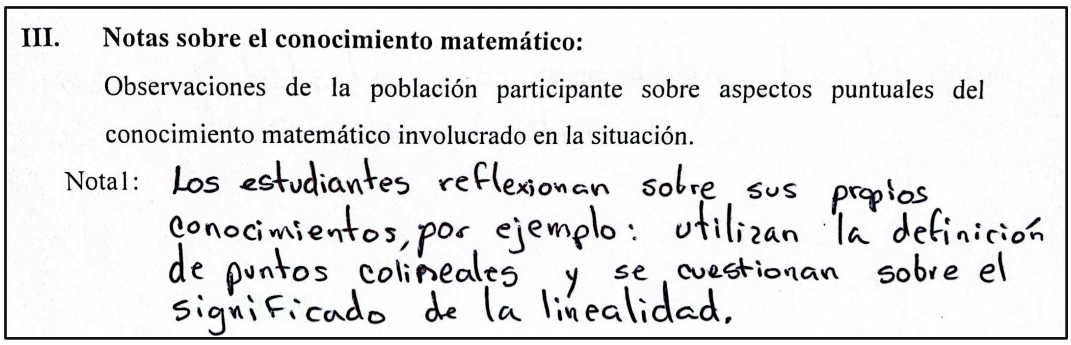

IV. **Notas sobre otros conocimientos:**

Observaciones de la población participante sobre otros conocimientos, por ejemplo: el conocimiento didáctico, pedagógico, curricular y experiencial.

Nota1: * Se solicitó a estudiante trazar una recta y trazó un segmento

Figura 3. Nota de investigador-observador sobre la representación de la línea recta. Fuente: NIO.

El IP cuestiona el significado de colineales, V-APa1-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están en la misma dirección", V-AP3-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están seguidos", V-APa1-S1|0:27:00-0:27:05|: "Dos direcciones, pero una opuesta a la inicial". Cuando se discute con todo el grupo y el IP cuestiona la idea del equipo B, de que la recta no tiene dimensión, V-APa2-S1|0:29:16-0:29:17|: "Tiene una". Al retomar la idea de AP3 de que dos puntos definen una recta, V-AP3-S1|0:30:39-0:18:10|: "No sé, siento que va tirando por el lado de ángulos, porque se menciona línea recta, puede ser porque hay un ángulo de 90 grados, porque es el ángulo recto". El IP le cuestiona, 90 grados con qué, V-AP3-S1|0:30:39-0:18:10|: "En función al plano en el que está esa recta". En la DG, el investigador-observador nota que el significado de linealidad es cuestionado a partir de la colinealidad (ver figura 4).


III. **Notas sobre el conocimiento matemático:**

Observaciones de la población participante sobre aspectos puntuales del conocimiento matemático involucrado en la situación.

Nota1: Los estudiantes reflexionan sobre sus propios conocimientos, por ejemplo: utilizan la definición de puntos colineales y se cuestionan sobre el significado de la linealidad.

Figura 4. Nota de investigador-observador sobre los puntos colineales. Fuente: NIO.

(T2 y T3) Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento.

(T4) Ante esta pregunta, V-APa1-S1|0:36:28-0:36:48|: menciona que puede ser la distancia más corta en las paredes del aula donde estamos.

(T5) El V-AP3-S1|0:37:34-0:37:40|: "Un sector circular". Al pensar en la discusión con todo el grupo en líneas rectas en otras superficies, V-APa1-S1|0:39:44-0:39:57|: "Me parece que sobre el cilindro... dos puntos podrían estar en la altura". Ante el comentario del profesor BP1 de que en otras superficies podemos tener distancias más cortas, pero no serían rectas, el V-AP3-S1|0:42:08-0:42:47|: "En este momento se me venía a la mente; una vez estaba viendo un video acerca de cómo vuelan los aviones y por qué los aviones no vuelan en línea recta. Decían que volar en línea recta no era eficiente para los aviones porque se tardaban más, entonces que lo hacían en función a la curva de la Tierra. Yo decía: Pero ¿cómo?, si en el espacio se puede volar en línea recta.

Entonces, mencionaban que muchas veces la distancia en línea recta no es la más corta, sino que en otra superficie es una curva, pero no sé de dónde surge esa noción".

(T6) La APa1 muestra la distancia más corta entre el punto A y B con una cuerda tensa sobre esa superficie (ver figura 5). Al preguntar por la forma que tendría la representación de la línea recta en la esfera, el V-AP3-S1|0:50:34-0:50:40|: "Una circunferencia".

Figura 5. APa1 muestra la distancia más corta entre dos puntos en la esfera. Fuente: Fotografía-Sesión 1.

(T7) Ante la pregunta por la cantidad de segmentos entre el punto A y B, el V-AP3-S1|0:51:34-0:51:37|: menciona que infinitos. Después de la presentación de las profesoras CPa1 y CPa3 de los dos segmentos entre A y B, el V-AP3-S1|0:52:57-0:53:02|: "Yo diría uno que empiece en A, dé la vuelta y termine en B". El IP pregunta por qué sobrepondríamos la cuerda nuevamente, a lo que el AP3 menciona que podríamos dar la cantidad de vueltas que quisiéramos porque la línea recta en el plano se puede extender. El IP hace una explicación sobre lo ilimitado de la superficie de la esfera. Finalmente, después de indicar que pensamos en una sola vuelta, todos aceptan que hubiera dos segmentos de recta entre el punto A y B.

(T8) Al trazar la línea recta que pasa por A y B, se evidencia la necesidad del trabajo colaborativo para manipular el material concreto (ver figura 6).

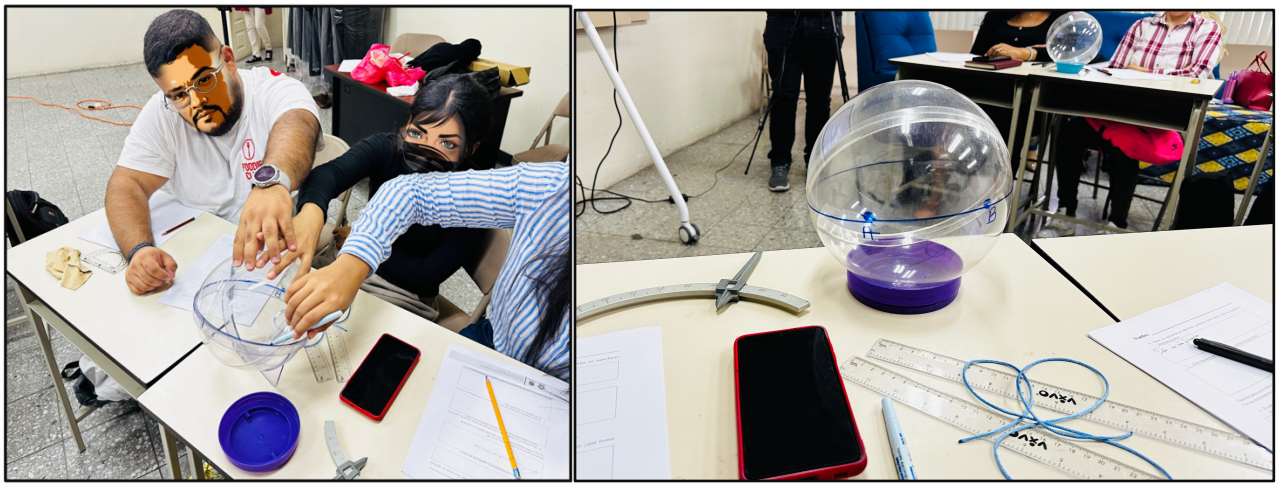


Figura 6. El equipo A traza la recta que pasa por A y B. Fuente: Fotografía-Sesión 1.

Después de tensar la cuerda sobre la representación de la circunferencia máxima, se les pregunta si en otras circunferencias también podemos tensar la cuerda. Responden que sí, pero al intentar tensar la cuerda en circunferencias más pequeñas, reconocen que no. Al preguntar por la diferencia de esa circunferencia y las otras más pequeñas, la V-APa1-S1|1:04:10-1:04:27|: "Puede ser la misma distancia, nosotros lo hicimos al azar, o sea, casi todos lo hicimos como al centro, a la mitad de la esfera puede ser que sea la misma distancia que hay desde aquí hasta arriba y desde aquí hasta abajo [señala desde la recta hasta el polo superior y desde la recta hasta el polo inferior (ver figura 7)]", de ahí, reconocen que divide a la esfera en dos partes iguales.

Figura 7. APa1 señala las dos semiesferas. Fuente: Video-Sesión 1.

(T9) En sus HT, la APa1 reconoce que hay infinitos puntos en ambas representaciones y que están en una dimensión a pesar de la superficie en la que están (ver figura 8). Además, menciona otros elementos que pone en discusión con el equipo.

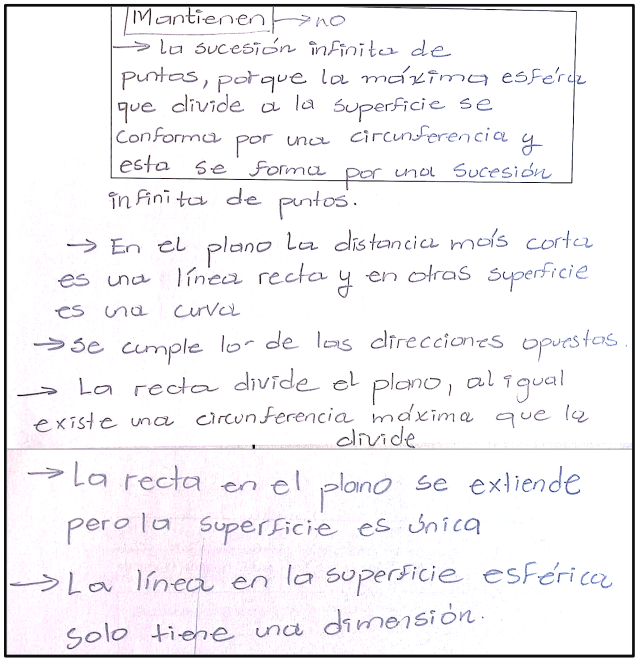


Figura 8. Respuesta de APa1 para la T9. Fuente: HT

En la DE, V-APa1-S1|1:11:45-1:12:21|: “Para mí lo que se cumple es lo de las direcciones opuestas. Se sabe que en el plano dijimos verdad que se mueve en una dirección y su opuesta; lo mismo vimos cuando lo de los polos, verdad, se cumple. En el plano, la distancia más corta es una línea recta y en la otra, una superficie curva, y se cumple que, por ejemplo, en el plano la recta es una sucesión infinita de puntos y lo mismo acá; aquí lo que pasa es que es una circunferencia lo que se forma, pero igual una circunferencia es una sucesión infinita de puntos”, como la APa2 agrega V-APa2-S1|1:12:25-1:12:29|: que no había encontrado diferencias. La APa1 menciona V-APa1-S1|1:12:34-1:12:51|: “Creo que más que todo es que la parte conceptual medio se mantiene, pero la representación no, porque si yo veo lo que hicimos aquí, esta línea no se ve como esa línea; sin embargo, sí mantiene la parte teórica”.

El IP le pregunta a la Apa1, como ella reconoció que la recta en la esfera separa a la esfera en dos partes iguales, se le pregunta si eso se cumple en el plano, ella menciona V-APa1-S1|1:13:18-1:12:51|: “Pero en partes iguales no necesariamente, por ejemplo, aquí está el plano y hago una línea aquí, aquí se nota que la proporción de aquí no es lo mismo que aquí [hace la construcción en una hoja de papel]”, entonces el IP, le pregunta, el plano llega hasta aquí [señalando el borde de la página], entonces el V-AP3-S1|1:13:35-1:13:37|: “No, el plano es infinito”, ahí reconocen que la recta en el plano divide al plano en dos semiplanos y en la esfera en dos hemisferios, sin embargo, según el investigador-observador no recuerdan la definición de semiplano (ver figura 9) ; V-APa2-S1|1:14:17-1:14:20|: “Entonces esa es otra característica”. Agregando a la discusión el AP3-S1|1:14:40-1:14:37|: “Lo que yo puse de diferente es que hay una recta máxima porque la superficie es finita, entonces va a haber una recta máxima y esa va a definir todo en la superficie que estamos estudiando”.

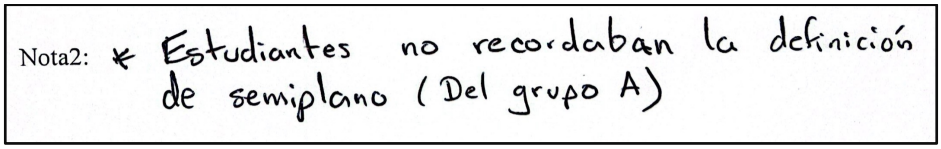


Figura 9. Nota de investigador-observador sobre la caracterización de semiplano. Fuente: NIO.

Equipo B:

(T1) En la discusión, V-BPa2-S1|0:18:23-0:18:33|: “Que tiene infinitos puntos”. Ante ello, V-BP1-S1|0:19:21-0:19:27|: “Yo puse que estaban en el mismo plano, no tiene dimensión y no se tiene una definición clara”. Los tres miembros del equipo mencionan estar de acuerdo en que la recta no tiene dimensión. Cuando escuchan la discusión del equipo A, V-BPa2-S1|0:18:23-0:18:33|: “Colineales, esa es la palabra que me hacía falta, porque solo diciendo los puntos pude ser una curva”. Cuando estaban escribiendo sus respuestas, V-BPa3-S1|0:22:24-0:22:28|: “Como no tiene dimensión, es una figura plana”. En la discusión con todo el grupo, el IP cuestiona la idea del equipo C sobre que al momento de trazar la recta no se levanta el lápiz, V-BPa2-S1|0:29:59-0:18:33|: “No, no necesariamente”.

(T2 y T3) Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento (ver Figura 10).

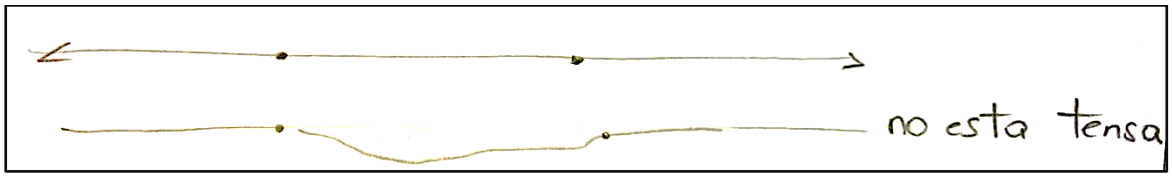


Figura 10. Respuesta de BP1. Fuente: HT.

(T5) En la discusión grupal, sobre la posibilidad de tener distancias más cortas entre dos puntos en otras superficies, V-BP1-S1|0:41:50-0:19:27|: “En esa superficie, sí, pero no sería recta” [reconocen a la representación como el objeto mismo].

(T8) En esta tarea, además de hacer la representación, con la discusión con el grupo concluyen que la circunferencia máxima es la representación de la línea recta en la esfera y que la divide en dos partes iguales.

(T9) En sus HT, centran sus diferencias en las superficies (ver figura 11, 12 y 13). Además, los 3 miembros del equipo están de acuerdo en que la recta esférica es finita; no hacen referencia a la ilimitación de la que se habló en la discusión de grupo anteriormente. En la discusión en equipos, la BPA3 confirma diciendo V-BPa3-S1|1:16:12-1:16:15|: “Aquí son finitas [señalando la esfera]”.

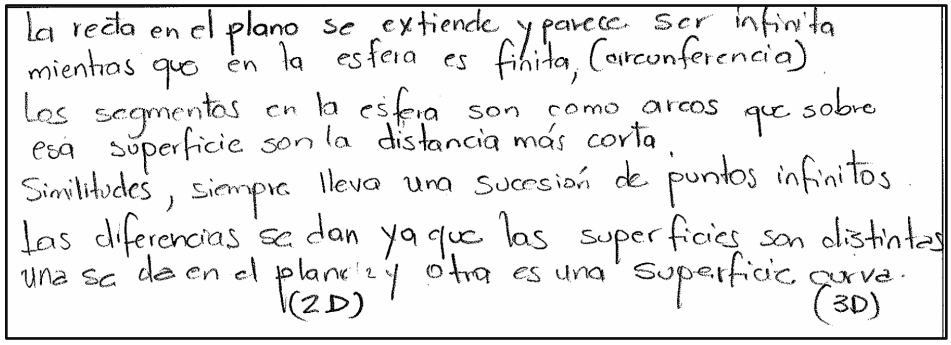

La recta en el plano se extiende y parece ser infinita mientras que en la esfera es finita, (circunferencia)
Las segmentos en la esfera son como arcos que sobre esa superficie son la distancia más corta.
Similitudes, siempre lleva una sucesión de puntos infinitos.
Las diferencias se dan ya que las superficies son distintas una se da en el plano (2D) y otra es una superficie curva. (3D)

Figura 11. Respuesta del BP1. Fuente: HT.

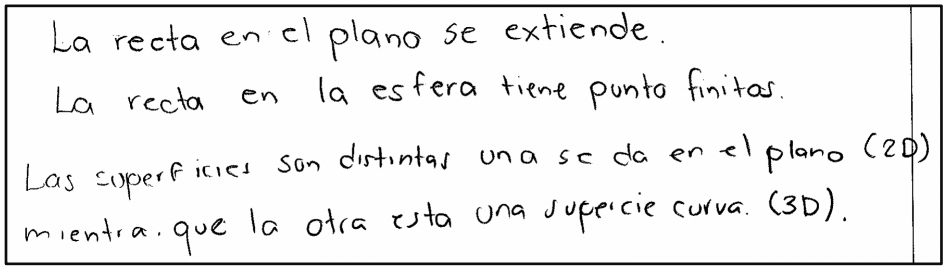

La recta en el plano se extiende.
La recta en la esfera tiene punto finitas.
Las superficies son distintas una se da en el plano (2D) mientra. que la otra esta una superficie curva. (3D).

Figura 12. Respuesta de la BPa2. Fuente: HT.

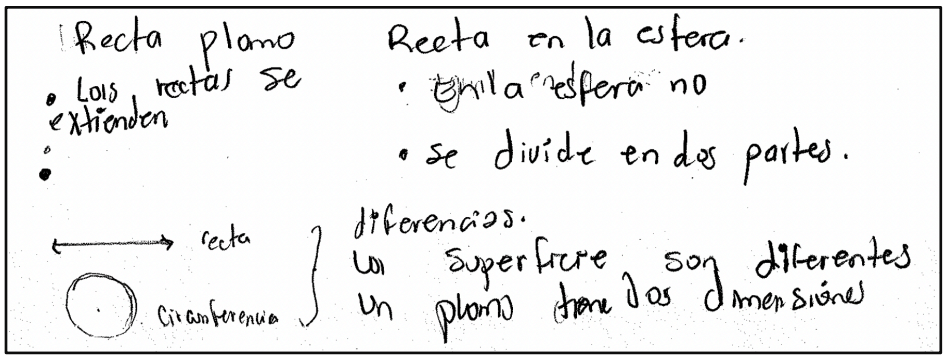


Figura 13. Respuesta de la BPa3. Fuente HT.

En la discusión con el grupo, cuando se cuestiona por qué se dan las diferencias, el V-BP1-S1|1:22:27-1:22:49|: "Bueno, nosotros pusimos es porque las superficies son distintas; primero, el plano está en dos dimensiones y ya esta superficie es curva, está en otra dimensión, la tercera dimensión".

Equipo C:

(T1) En la discusión, V-CPa1-S1|0:22:45-0:22:28|: "Al momento de trazarla no se levanta el lápiz y está unida de puntos consecutivos", las dos profesoras mencionan estar de acuerdo. Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende".

(T2 y T3) Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento.

(T5) Ante lo que dijo el AP3, que una recta en la esfera sería un arco de círculo, V-CPa1-S1|0:39:03-0:39:04|: "Ya no sería recta" [reconocen a la representación como el objeto mismo].

(T6) Al mostrar la distancia más corta entre el punto A y B, las profesoras CPa1 y CPa3 tensan la cuerda (ver figura 14).

Figura 14. Las CPa1 y CPa3 muestran la distancia más corta entre A y B. Fuente: Video-Sesión 1.

(T7) Como el AP3 menciona que entre el punto A y B pueden tener infinitos segmentos, el IP les pide que muestre otros segmentos entre estos puntos; por ello, CPa1 primero muestra la cuerda doblada, indicando varias veces la misma distancia entre A y B (ver figura 15), al indicarle que son segmentos que deben estar sobre la superficie, muestran el otro segmento entre A y B (ver figura 16).

Figura 15. CPa1 muestra la distancia entre el segmento A y B doblando la cuerda. Fuente: Video-Sesión 1.

Figura 16. CPa1 muestra dos distancia cortas entre A y B. Fuente: Fotografía-Sesión 1.

Cuando se presenta el caso de los puntos opuestos y se pregunta por la cantidad de segmentos entre ellos, la V-CPa1-S1|0:54:51-0:54:52|: “Infinitos”. Al pedirle que muestre más de dos, presenta los casos de la figura 17, para concluir que son infinitos. Cuando se les pregunta por la diferencia entre los puntos que marcaron ellos y los puntos que yo señalé, la V-CPa1-S1|0:56:17-0:56:18|: “Están opuestos”.

Figura 17. CPa1 presenta varias distancias cortas entre el punto A y B. Fuente: Video y fotografía-Sesión 1.

(T8) Para verificar que la representación trazada era una línea recta, tensaron la cuerda sobre la representación (ver figura 18). Al discutir sobre el tamaño de la circunferencia que pasa por A y B, reconocen que no se pueden construir circunferencias más grandes en esa esfera, por lo que este tipo de circunferencia serían las líneas rectas en la superficie de la esfera.

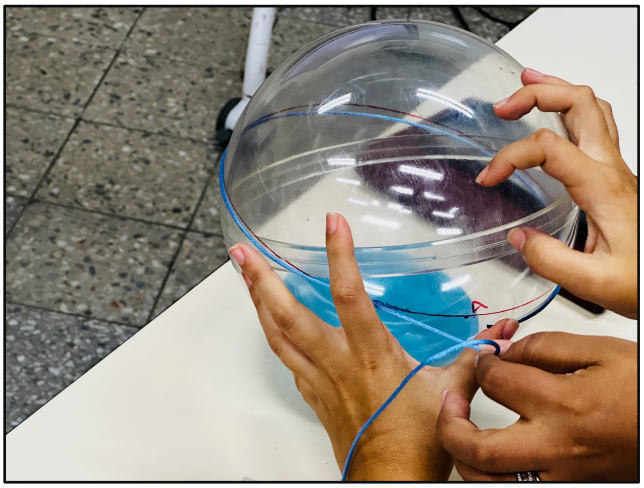


Figura 18. CPa1 y CPa2 tensan la cuerda sobre una recta esférica. Fuente: Fotografía-sesión 1.

(T9) En las HT, la CPa1 habla de la finitud de la recta en la esfera consecuencia de esta superficie (ver figura 19). Por su parte, la CPa3 reconoce la forma en la que llegaron a construir la recta en la esfera, es decir, la cuerda tensa, como esa característica que se mantiene, dado que solo había construido una circunferencia máxima, indica que solo se podía construir una (ver figura 20).

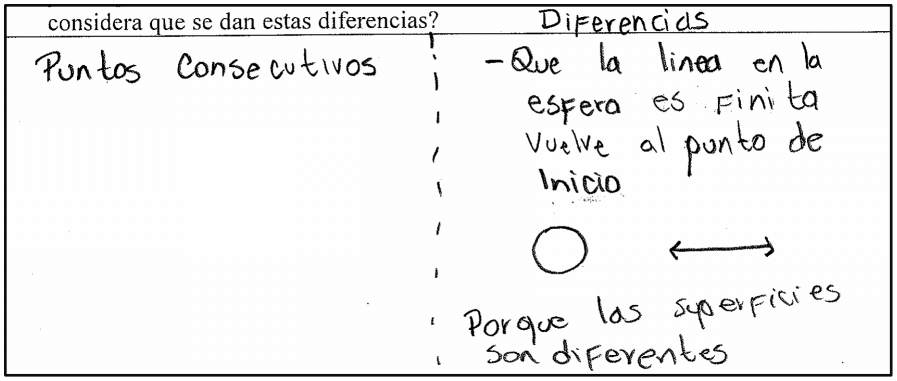


Figura 19. Respuesta de la CPa1. Fuente: HT

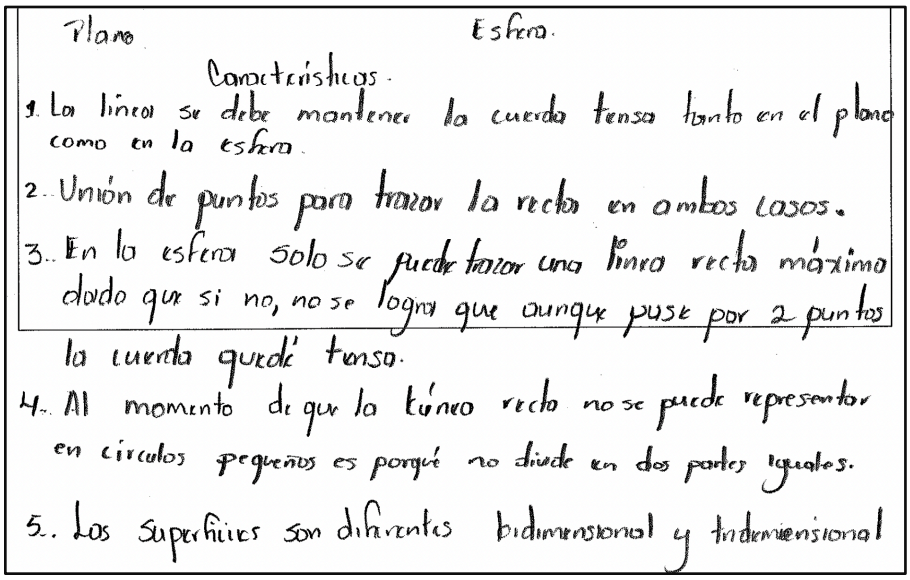
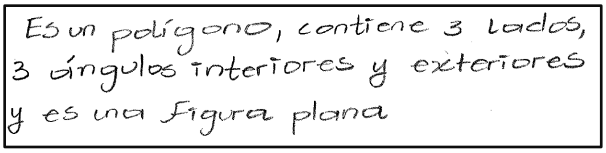
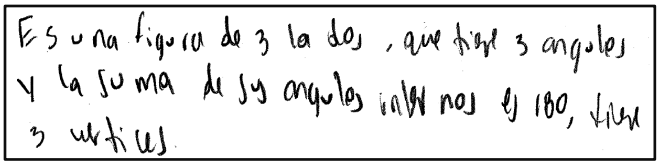


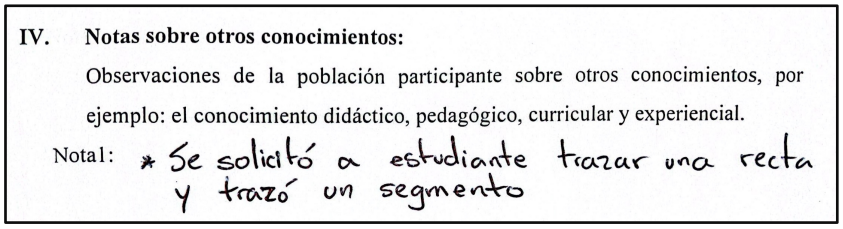
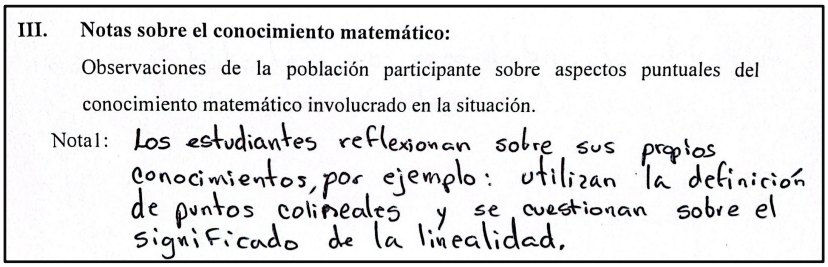
Figura 20. Respuesta de la CPa3. Fuente: HT.

En la discusión de equipo, la CPa1 confirma que V-CPa1-S1|1:17:58-1:54:52|: “Las diferencias es que la línea en la esfera es finita porque vuelve al mismo lugar donde comenzó y mientras que en el plano sigue verdad, y las representaciones son diferentes”. Ante ello, la CPa3 menciona V-CPa3-S1|1:18:12-1:54:52|: “Casi lo mismo, se mantiene en la esfera y en la otra con la cuerda tensa… [cuando la CPa1 le pregunta por la diferencia] solo se puede representar una circunferencia máxima, que pase por esos dos puntos, porque aquí la cuerda ya no queda tensa, entonces no divide en dos”. Cuando el IP les pregunta por la diferencia, la V-CPa1-S1|1:19:59-1:20:11|: “Y la diferencia es que en la esfera, al momento de trazarla, vuelve al mismo punto y en el plano no; en el plano es infinito”.

1-1 Análisis de prácticas (acciones y actividades): introducción y parte I

Descripción y análisis de prácticas (acciones y actividades) de las tareas de problematización por partes del diseño, por equipos y por participante.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
Introducción **Equipo A:** Caracterizan el triángulo como una figura geométrica plana y como un polígono. Por ejemplo, V-APa2-S1|0:09:15-0:08:28|: "Es una figura geométrica plana que la componen 3 ángulos, 3 lados y 3 vértices". Además, APa1 en sus HT menciona a los ángulos exteriores como elementos del triángulo; y, al igual que APa2, caracteriza al triángulo como una figura plana [*generalización euclidiana*] (ver figura 1) y AP3 agrega la propiedad de que la suma de sus ángulos internos es 180, sin agregar el signo de grados [*generalización euclidiana*] (ver figura 2).  Figura1. Respuesta de APa1. Fuente: HT.  Figura 2. Respuesta de AP3. Fuente: HT.	**Reconocen** al triángulo como una figura compuesta por ángulos y lados. **Señalan** los ángulos exteriores de un triángulo. **Exponen** propiedades de un triángulo.	**Caracterizando** al triángulo como una figura geométrica plana (como un polígono), compuesta por varios elementos y se cumple que la suma de sus ángulos internos es igual a 180 grados.
Equipo B: Caracterizan el triángulo en sus HT como una figura plana que tiene 3 lados, 3 ángulos y 3 vértices. No obstante, en la discusión se menciona que también es un polígono y que un polígono V-BP1-S1|0:10:03-0:10:15|: "Es una figura plana con varios lados… con n lados".	**Componen** un polígono con n lados. **Reconocen** al triángulo como una figura compuesta por ángulos y lados.	**Caracterizando** el polígono como una figura compuesta por varios lados.
Equipo C: Caracterizan el triángulo como una figura plana que tiene 3 lados, 3 ángulos y 3 vértices.	**Reconocen** al triángulo como una figura compuesta por ángulos y lados.	**Caracterizando** el polígono como una figura compuesta por varios lados.
Parte I **Equipo A:** (T1) En la discusión en equipo, la APa1 menciona que V-APa1-S1|0:15:06-0:15:30|: "Una vez que usted empieza a trazar, tiene la misma dirección. Por ejemplo, aquí, cuando	**Trazan** una línea recta sin cambiar de dirección.	**Construyendo** un segmento usando una regla plana y

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
lo hice, si se fija, empecé a trazar así. Bueno, este es un segmento; eso es lo que la hace, para mí, recta", esto fue una de las notas del investigador-observador (ver figura 3). Por su parte, APa2 menciona V-APa2-S1|0:15:32-0:15:30|: "Una sucesión de infinitos puntos colineales y dos puntos definen una recta". De ahí, APa1 reconoce que la unión de las dos son esas características, y APa2 agrega V-APa2-S1|0:15:59-0:16:03|: "Tiene la misma dirección; si no, no sería línea recta". Por su parte, V-AP3-S1|0:16:46-0:17:00|: "Para mí, dos puntos definen una línea recta"; luego discuten que, si se tienen tres puntos, deben ser colineales. El IP discute con el equipo sobre la posibilidad de unir esos dos puntos con líneas curvas, entonces el V-AP3-S1|0:18:06-0:18:10|: "Creo que entonces está mejor la de ellas [refiere a APa2], que son infinitos puntos colineales".	**Transfieren** la rectitud de la recta a un segmento. **Reconocen** propiedades de un recta en un segmento. **Prolongan** o extienden segmentos. **Componen** a la recta por puntos y segmentos. **Organizan** los puntos de forma colineal. **Reconocen** propiedades: la infinitud de la recta.	**caracterizando** la rectitud de la recta a través de la rectitud del segmento. **Caracterizan** la rectitud de la recta a través de la posición de los puntos, ubicándolos de manera colineal (como una forma de ubicar los puntos) y hasta el infinito.
 Figura 3. Nota de investigador-observador sobre la representación de la línea recta. Fuente: NIO.		
El IP cuestiona el significado de colineales, V-APa1-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están en la misma dirección", V-AP3-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están seguidos", V-APa1-S1|0:27:00-0:27:05|: "Dos direcciones, pero una opuesta a la inicial". Cuando se discute con todo el grupo y el IP cuestiona la idea del equipo B, de que la recta no tiene dimensión, V-APa2-S1|0:29:16-0:29:17|: "Tiene una". Al retomar la idea de AP3 de que dos puntos definen una recta, V-AP3-S1|0:30:39-0:18:10|: "No sé, siento que va tirando por el lado de ángulos, porque se menciona línea recta, puede ser porque hay un ángulo de 90 grados, porque es el ángulo recto". El IP le cuestiona, 90 grados con qué, V-AP3-S1|0:30:39-0:18:10|: "En función al plano en el que está esa recta". En la DG, el investigador-observador nota que el significado de linealidad es cuestionado a partir de la colinealidad (ver figura 4).	**Relacionan e interpretan la** rectitud de la recta con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra. **Extienden** la recta en dos direcciones, una opuesta a la inicial. **Reconocen** que la recta tiene una dimensión. **Relacionan** a la recta con el ángulo recto (por el nombre).	**Cuestionando** el significado de colinealidad lo asocian a una misma dirección, o a dos direcciones, pero una opuesta a la otra. **Asociando** una dimensión a la recta y **relacionando** su nombre al ángulo recto.
 Figura 4. Nota de investigador-observador sobre los puntos colineales. Fuente: NIO.		

<table>
<tr><th colspan="3">Nivel de acción</th></tr>
<tr><th>Tareas de problematización</th><th>¿Qué hacen?</th><th>¿Cómo lo hacen?</th></tr>
<tr><td>(T2 y T3) Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento.
(T4) Ante esta pregunta, V-APa1-S1|0:36:28-0:36:48|: menciona que puede ser la distancia más corta en las paredes del aula donde estamos.
(T5) El V-AP3-S1|0:37:34-0:37:40|: “Un sector circular”. Al pensar en la discusión con todo el grupo en líneas rectas en otras superficies, V-APa1-S1|0:39:44-0:39:57|: “Me parece que sobre el cilindro... dos puntos podrían estar en la altura”. Ante el comentario del profesor BP1 de que en otras superficies podemos tener distancias más cortas, pero no serían rectas, el V-AP3-S1|0:42:08-0:42:47|: “En este momento se me venía a la mente; una vez estaba viendo un video acerca de cómo vuelan los aviones y por qué los aviones no vuelan en línea recta. Decían que volar en línea recta no era eficiente para los aviones porque se tardaban más, entonces que lo hacían en función a la curva de la Tierra. Yo decía: Pero ¿cómo?, si en el espacio se puede volar en línea recta. Entonces, mencionaban que muchas veces la distancia en línea recta no es la más corta, sino que en otra superficie es una curva, pero no sé de dónde surge esa noción”.
(T6) La APa1 muestra la distancia más corta entre el punto A y B con una cuerda tensa sobre esa superficie (ver figura 5). Al preguntar por la forma que tendría la representación de la línea recta en la esfera, el V-AP3-S1|0:50:34-0:50:40|: “Una circunferencia”.

Figura 5. APa1 muestra la distancia más corta entre dos puntos en la esfera. Fuente: Fotografía-Sesión 1.

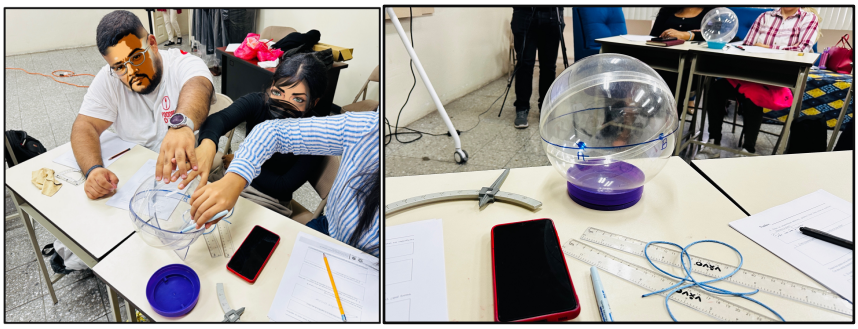
(T7) Ante la pregunta por la cantidad de segmentos entre el punto A y B, el V-AP3-S1|0:51:34-0:51:37|: menciona que infinitos. Después de la presentación de las profesoras CPa1 y CPa3 de los dos segmentos entre A y B, el V-AP3-S1|0:52:57-0:53:02|: “Yo diría uno que empiece en A, dé la vuelta y termine en B”. El IP pregunta por qué sobrepondríamos la cuerda nuevamente, a lo que el AP3 menciona que podríamos dar la cantidad de vueltas que quisiéramos porque la línea recta en el plano se puede extender. El IP hace una explicación sobre lo ilimitado de la superficie de la esfera. Finalmente, después de indicar que pensamos en una sola vuelta, todos aceptan que hubiera dos segmentos de recta entre el punto A y B.</td><td>Interpretan la distancia más corta entre dos puntos como el segmento de recta.
Reconocen que una cuerda tensa entre dos puntos representa un segmento de recta.
Exponen diferentes superficies en las que se pueden trazar distancias cortas entre dos puntos (paredes del aula y cilindro).
Trasladan la recta plana a la esfera, formando un sector circular.
Relacionan a la línea recta con la distancia más corta, con la analogía de los aviones.
Reconocen que el vuelo de los aviones depende de la curvatura de la tierra, por lo que su trayecto es una curva.
Tensan la cuerda para mostrar la distancia más corta entre dos puntos.

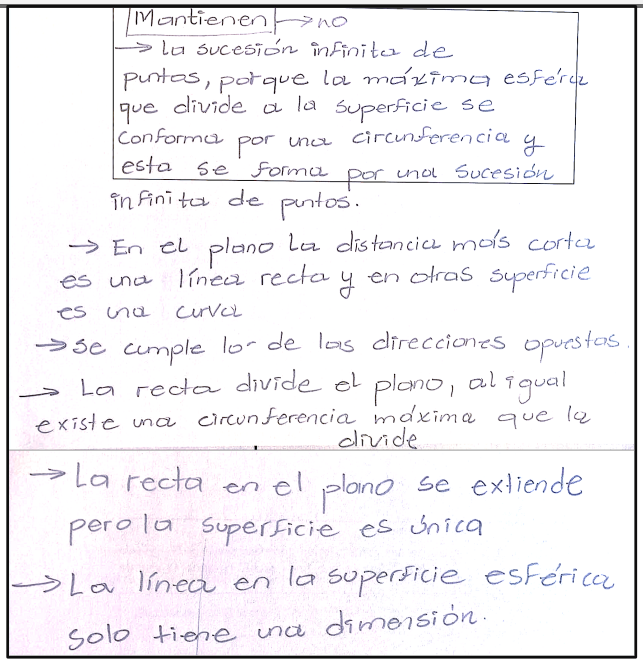
Reconocen infinitos segmentos entre dos puntos en la esfera.
Extienden el segmento de recta tanto como quiere.
Sobreponen segmentos de recta.
Trasladan la infinitud de la recta plana a la</td><td>Exponiendo que para que una cuerda represente la distancia más corta entre dos puntos, debe estar tensa.

Ejemplificando diferentes superficies en las que se puede tener cuerdas tensas que representarán la distancias más corta entre dos puntos.

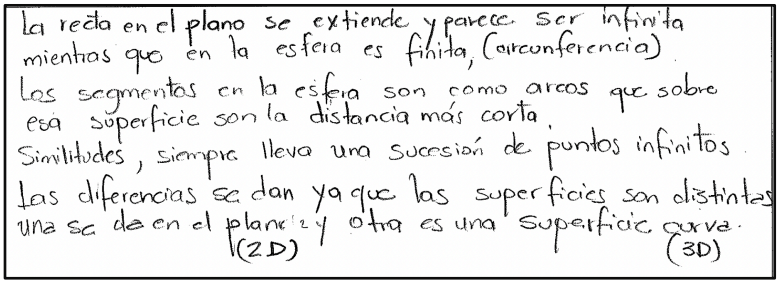
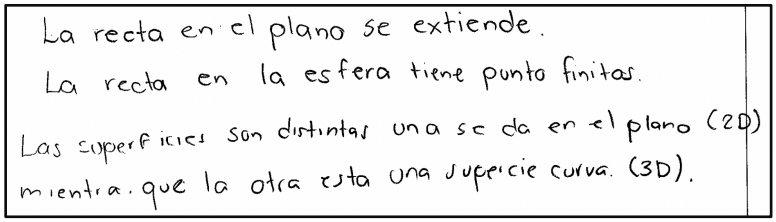
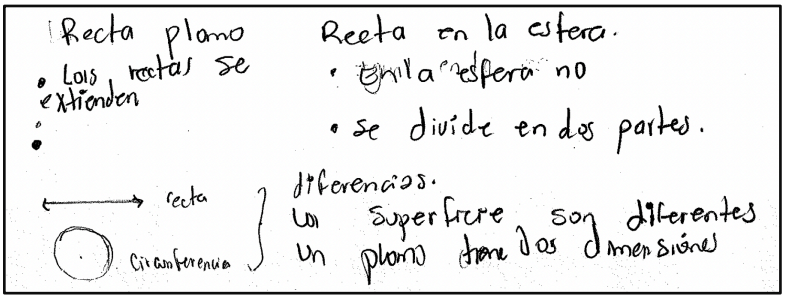
Concibiendo a la recta plana en la esfera, como una recta que interseca a la superficie de la esfera en dos puntos.
Relacionando el trayecto de los aviones con la distancia más corta, pero por su forma hacen una distinción con la representación de la línea recta que conocen hasta el momento.
Aprobando la analogía de la cuerda tensa para representar la distancia más corta entre dos puntos.

Trasladando la idea de infinitud de la recta plana a la esfera, dado la cantidad de vueltas que quiera y construyendo infinitas rectas entre dos puntos.</td></tr>
</table>

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
(T8) Al trazar la línea recta que pasa por A y B, se evidencia la necesidad del trabajo colaborativo para manipular el material concreto (ver figura 6).  Figura 6. El equipo A traza la recta que pasa por A y B. Fuente: Fotografía-Sesión 1.	esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran. **Identifican** en una sola vuelta dos segmentos de recta entre dos puntos. **Trazan** la recta esférica que pasa por A y B.	**Limitando** la representación a una sola vuelta. **Usando** la regla esférica.
Después de tensar la cuerda sobre la representación de la circunferencia máxima, se les pregunta si en otras circunferencias también podemos tensar la cuerda. Responden que sí, pero al intentar tensar la cuerda en circunferencias más pequeñas, reconocen que no. Al preguntar por la diferencia de esa circunferencia y las otras más pequeñas, la V-APa1-S1|1:04:10-1:04:27|: "Puede ser la misma distancia, nosotros lo hicimos al azar, o sea, casi todos lo hicimos como al centro, a la mitad de la esfera puede ser que sea la misma distancia que hay desde aquí hasta arriba y desde aquí hasta abajo [señala desde la recta hasta el polo superior y desde la recta hasta el polo inferior (ver figura 7)]", de ahí, reconocen que divide a la esfera en dos partes iguales. Figura 7. APa1 señala las dos semiesferas. Fuente: Video-Sesión 1.	**Verifican o prueban** que sobre el trazo con la regla esférica se puede tensar la cuerda. **Procuran** tensar la cuerda en circunferencias más pequeñas. **Observan y reconocen** que la recta AB divide a la esfera en dos semiesferas iguales, por ello ahí sí se puede tensar la cuerda. **Interpretan y asignan** propiedades a la recta AB (divide a la esfera en dos semiesferas).	**Tensando** la cuerda sobre la representación de la recta esférica. **Probando** si la cuerda se puede tensar en otras circunferencias. **Justificando** que la cuerda no puede tensarse en otras circunferencia y **reconociendo** una propiedad de la recta AB.
(T9) En sus HT, la APa1 reconoce que hay infinitos puntos en ambas representaciones y que están en una dimensión a pesar de la superficie en la que están (ver figura 8). Además, menciona otros elementos que pone en discusión con el equipo.	**Reconocen** que ambas representaciones de recta están compuestas por infinitos puntos. **Componen** rectas con puntos. **Dimensionan** a la recta.	**Observando** infinitos puntos en ambas representaciones de recta. **Asociando** las nociones geométricas con las dimensiones del espacio.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
 Figura 8. Respuesta de APa1 para la T9. Fuente: HT	**Diferencian** las representaciones geométricas para las distancias más cortas entre dos puntos. **Admiten** que tanto en el plano como en la esfera la recta puede interpretarse como en direcciones opuestas y que ambas representaciones dividen a su superficie en dos partes, semiplanos o semiesfera.	**Reconociendo** que en la esfera la distancia más corta es una curva. **Otorgando** propiedades a la recta pensando en la superficie en la que se encuentra representada.
En la DE, V-APa1-S1|1:11:45-1:12:21|: "Para mí lo que se cumple es lo de las direcciones opuestas. Se sabe que en el plano dijimos verdad que se mueve en una dirección y su opuesta; lo mismo vimos cuando lo de los polos, verdad, se cumple. En el plano, la distancia más corta es una línea recta y en la otra, una superficie curva, y se cumple que, por ejemplo, en el plano la recta es una sucesión infinita de puntos y lo mismo acá; aquí lo que pasa es que es una circunferencia lo que se forma, pero igual una circunferencia es una sucesión infinita de puntos", como la APa2 agrega V-APa2-S1|1:12:25-1:12:29|: que no había encontrado diferencias. La APa1 menciona V-APa1-S1|1:12:34-1:12:51|: "Creo que más que todo es que la parte conceptual medio se mantiene, pero la representación no, porque si yo veo lo que hicimos aquí, esta línea no se ve como esa línea; sin embargo, sí mantiene la parte teórica". El IP le pregunta a la Apa1, como ella reconoció que la recta en la esfera separa a la esfera en dos partes iguales, se le pregunta si eso se cumple en el plano, ella menciona V-APa1-S1|1:13:18-1:12:51|: "Pero en partes iguales no necesariamente, por ejemplo, aquí está el plano y hago una línea aquí, aquí se nota que la proporción de aquí no es lo mismo que aquí [hace la construcción en una hoja de papel]", entonces el IP, le pregunta, el plano llega hasta aquí [señalando el borde de la página], entonces el V-AP3-S1|1:13:35-1:13:37|: "No, el plano es infinito", ahí reconocen que la recta en el plano divide al plano en dos semiplanos y en la esfera en dos hemisferios, sin embargo, según el investigador-observador no recuerdan la definición de semiplano (ver figura 9) ; V-APa2-S1|1:14:17-1:14:20|: "Entonces esa es otra característica". Agregando a la discusión el AP3-S1|1:14:40-1:14:37|: "Lo que yo puse de diferente es que hay una recta	**Atribuyen** propiedades a la recta en dependencia de la superficie en la que está su representación. **Diferencian** las superficies. **Reconocen** la densidad de la recta esférica. **Distinguen** las propiedades por sus representaciones. **Admiten** dos representaciones para la recta. **Representan** al plano en una hoja de papel. **Cuestionan** la infinitud del plano. **Admiten** que ambas representaciones dividen a su superficie en dos partes, semiplanos o semiesfera.	**Aceptando** que una circunferencia también está compuesta por infinitos puntos y que puede **prolongarse** por la cantidad de vueltas. **Limitando** la infinitud del plano a una hoja de papel y **cuestionando** sus límites.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
máxima porque la superficie es finita, entonces va a haber una recta máxima y esa va a definir todo en la superficie que estamos estudiando”.	**Aceptan** que la superficie esférica es finita.	**Justificando** que existen circunferencias máxima.
Figura 9. Nota de investigador-observador sobre la caracterización de semiplano. Fuente: NIO.		
Equipo B:		
(T1) En la discusión, V-BPa2-S1|0:18:23-0:18:33|: “Que tiene infinitos puntos”. Ante ello, V-BP1-S1|0:19:21-0:19:27|: “Yo puse que estaban en el mismo plano, no tiene dimensión y no se tiene una definición clara”. Los tres miembros del equipo mencionan estar de acuerdo en que la recta no tiene dimensión. Cuando escuchan la discusión del equipo A, V-BPa2-S1|0:18:23-0:18:33|: “Colineales, esa es la palabra que me hacía falta, porque solo diciendo los puntos pude ser una curva”. Cuando estaban escribiendo sus respuestas, V-BPa3-S1|0:22:24-0:22:28|: “Como no tiene dimensión, es una figura plana”. En la discusión con todo el grupo, el IP cuestiona la idea del equipo C sobre que al momento de trazar la recta no se levanta el lápiz, V-BPa2-S1|0:29:59-0:18:33|: “No, no necesariamente”.	**Reconocen** propiedades de la recta, la infinitud de puntos. **Componen** la recta con puntos. **Dimensionan** la recta. **Asignan** una forma en la que deben estar los puntos, deben ser colineales.	**Indicando** que no tiene dimensión por estar en el plano. **Asociando** características a la rectitud de la recta.
(T2 y T3) Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento (ver Figura 10). Figura 10. Respuesta de BP1. Fuente: HT.	**Reconocen** que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos. **Admiten** que una cuerda debe estar tensa para representar la distancia más corta entre dos puntos.	**Exponiendo** la condición en la que debe estar una cuerda para representar la distancia más corta entre dos puntos.
(T5) En la discusión grupal, sobre la posibilidad de tener distancias más cortas entre dos puntos en otras superficies, V-BP1-S1|0:41:50-0:19:27|: “En esa superficie, sí, pero no sería recta” [reconocen a la representación como el objeto mismo]. (T8) En esta tarea, además de hacer la representación, con la discusión con el grupo concluyen que la circunferencia máxima es la representación de la línea recta en la esfera y que la divide en dos partes iguales. (T9) En sus HT, centran sus diferencias en las superficies (ver figura 11, 12 y 13). Además, los 3 miembros del equipo están de acuerdo en que la recta esférica es finita; no hacen referencia a la ilimitación de la que se habló en la discusión de grupo anteriormente. En la discusión en equipos, la BPA3 confirma diciendo V-BPa3-S1|1:16:12-1:16:15|: “Aquí son finitas [señalando la esfera]”.	**Aceptan** que la circunferencia máxima representa la distancia más corta pero **no la reconocen** como recta. **Trasladan** su representación de recta a la esfera. **Relacionan** circunferencia máxima con distancia más corta y distancia	**Reconociendo** a la representación de la recta plana como la línea recta, por lo que no la admiten como la recta. Pensando a la recta en la esfera como la recta plana. Utilizando la distancia más corta (con la cuerda tensa), con las

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
 Figura 11. Respuesta del BP1. Fuente: HT.  Figura 12. Respuesta de la BPa2. Fuente: HT.  Figura 13. Respuesta de la BPa3. Fuente HT.	más corta con recta esférica. **Evidencian** la finitud de la recta esférica como consecuencia de estar en una superficie finita y por su forma (una circunferencia). **Extienden** la recta. **Diferencian** sus representaciones. **Componen** a la recta por puntos y **atribuyen** propiedades únicas para recta plana, como la densidad y su infinitud. **Reconocen** que la recta divide a la superficie en dos semiplanos y en dos semiesferas.	representaciones de recta. **Justificando** los cambio en las diferencias de superficie y estas diferencias a los cambio de dimensiones entre ellas. **Exponiendo** sus propiedades e **indicando** que los segmentos en la esfera son arcos. **Caracterizando** las representaciones de rectas y **justificando** sus similitudes y diferencias.
En la discusión con el grupo, cuando se cuestiona por qué se dan las diferencias, el V-BP1-S1|1:22:27-1:22:49|: "Bueno, nosotros pusimos es porque las superficies son distintas; primero, el plano está en dos dimensiones y ya esta superficie es curva, está en otra dimensión, la tercera dimensión".	**Dimensionan** las superficies. **Diferencian** las superficies.	**Justificando** las diferencias entre las representaciones de recta.
Equipo C:		
(T1) En la discusión, V-CPa1-S1|0:22:45-0:22:28|: "Al momento de trazarla no se levanta el lápiz y está unida de puntos consecutivos", las dos profesoras mencionan estar de acuerdo. Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende". (T2 y T3) Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento.	**Trazan** una recta. **Componen** la recta por puntos sucesivos y esto lo hacen trazándola sin levantar el lápiz. **Prolongan** o extienden segmentos. **Distinguen** un segmento de una recta. **Reconocen** propiedades de la recta, su infinitud.	Usando una regla plana, sin levantar el lápiz, hacen el trazo de la recta. **Indicando** que un segmento tiene extremos. **Interpretando** en la representación el uso de flechas.

<table>
<tr><th colspan="3">Nivel de acción</th></tr>
<tr><th>Tareas de problematización</th><th>¿Qué hacen?</th><th>¿Cómo lo hacen?</th></tr>
<tr><td>(T5) Ante lo que dijo el AP3, que una recta en la esfera sería un arco de círculo, V-CPa1-S1|0:39:03-0:39:04|: “Ya no sería recta” [reconocen a la representación como el objeto mismo].
(T6) Al mostrar la distancia más corta entre el punto A y B, las profesoras CPa1 y CPa3 tensan la cuerda (ver figura 14).

Figura 14. Las CPa1 y CPa3 muestran la distancia más corta entre A y B. Fuente: Video-Sesión 1.

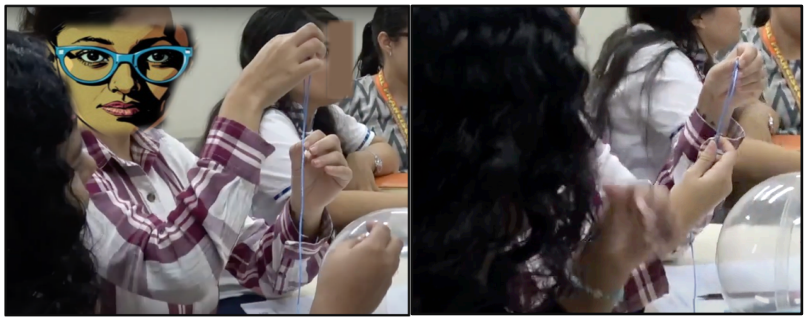
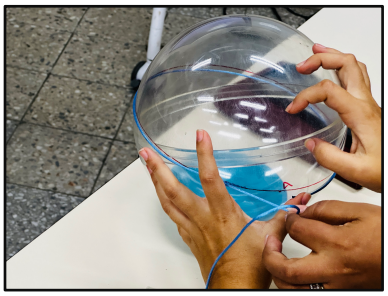
(T7) Como el AP3 menciona que entre el punto A y B pueden tener infinitos segmentos, el IP les pide que muestre otros segmentos entre estos puntos; por ello, CPa1 primero muestra la cuerda doblada, indicando varias veces la misma distancia entre A y B (ver figura 15), al indicarle que son segmentos que deben estar sobre la superficie, muestran el otro segmento entre A y B (ver figura 16).
 
Figura 15. CPa1 muestra la distancia entre el segmento A y B doblando la cuerda. Fuente: Video-Sesión 1.

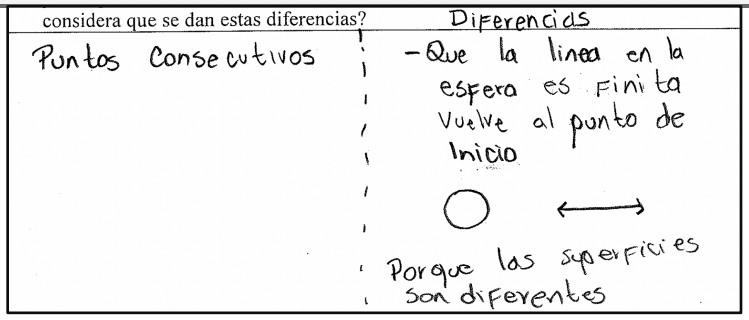
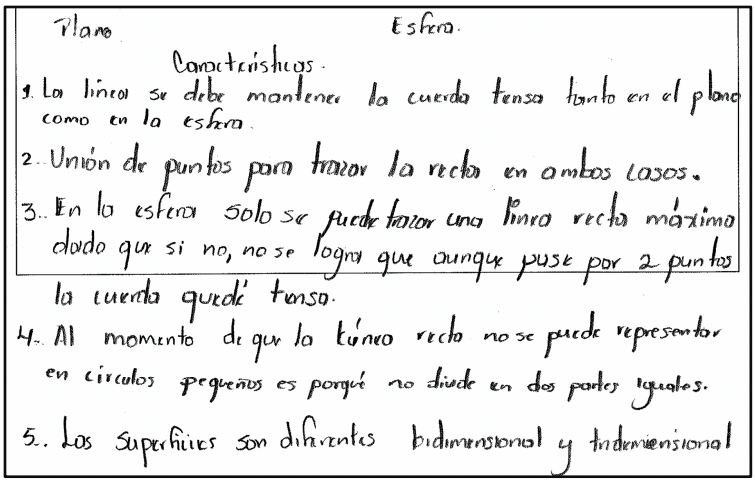
Figura 16. CPa1 muestra dos distancia cortas entre A y B. Fuente: Fotografía-Sesión 1.</td><td>Representan propiedades a través de símbolos.
Extienden la recta.
Reconocen que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos.

Admiten que una cuerda debe estar tensa para representar la distancia más corta entre dos puntos.
Aceptan que la circunferencia máxima representa la distancia más corta pero no la reconocen como recta.

Asocian los segmentos entre A y B como la distancia entre A y B.
Muestran que existen dos segmentos entre A y B.
Reconocen la existencia de dos segmentos entre A y B.</td><td>Exponiendo la condición en la que debe estar una cuerda para representar la distancia más corta entre dos puntos.
Reconociendo a la representación de la recta plana como la línea recta, por lo que no la admiten como la recta.

Doblando la cuerda exponen que podrían representar muchas veces la distancia entre A y B.
Identificando los dos segmentos que completan la circunferencia máxima.</td></tr>
</table>

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
Cuando se presenta el caso de los puntos opuestos y se pregunta por la cantidad de segmentos entre ellos, la V-CPa1-S1|0:54:51-0:54:52|: "Infinitos". Al pedirle que muestre más de dos, presenta los casos de la figura 17, para concluir que son infinitos. Cuando se les pregunta por la diferencia entre los puntos que marcaron ellos y los puntos que yo señalé, la V-CPa1-S1|0:56:17-0:56:18|: "Están opuestos". Figura 17. CPa1 presenta varias distancias cortas entre el punto A y B. Fuente: Video y fotografía-Sesión 1.	**Ejemplifican** varios segmentos entre A y B cuando son puntos opuestos. **Reconocen** infinitos segmentos entre A y B.	Mostrando con la cuerda tensa diferentes segmentos entre los puntos A y B.
(T8) Para verificar que la representación trazada era una línea recta, tensaron la cuerda sobre la representación (ver figura 18). Al discutir sobre el tamaño de la circunferencia que pasa por A y B, reconocen que no se pueden construir circunferencias más grandes en esa esfera, por lo que este tipo de circunferencia serían las líneas rectas en la superficie de la esfera.  Figura 18. CPa1 y CPa2 tensan la cuerda sobre una recta esférica. Fuente: Fotografía-sesión 1.	**Verifican o prueban** que sobre el trazo con la regla esférica se puede tensar la cuerda. **Reconocen** a la línea recta como la circunferencia máxima.	**Tensando** la cuerda sobre la representación de la recta esférica.
(T9) En las HT, la CPa1 habla de la finitud de la recta en la esfera consecuencia de esta superficie (ver figura 19). Por su parte, la CPa3 reconoce la forma en la que llegaron a construir la recta en la esfera, es decir, la cuerda tensa, como esa característica que se mantiene, dado que solo había construido una circunferencia máxima, indica que solo se podía construir una (ver figura 20).	**Reconocen** que la recta en la esfera es finita. **Atribuyen** propiedades a la recta esférica.	**Tensando** la cuerda sobre la representación de la recta. **Transfiriendo** características de la superficie a la representaciones que se hacen en ella.

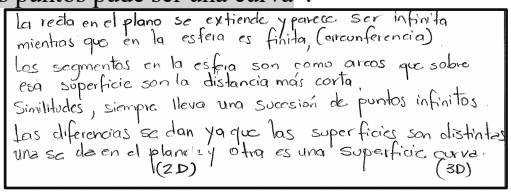
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hacen?***	***¿Cómo lo hacen?***
 Figura 19. Respuesta de la CPa1. Fuente: HT	**Justifican** la diferencia de las representación por las superficies. **Componen** las rectas por puntos consecutivos.	**Señalando** las diferencias en las superficies.
 Figura 20. Respuesta de la CPa3. Fuente: HT.	**Admiten** que las cuerdas tensan representan líneas rectas en las dos superficies. **Componen** rectas por puntos. **Atribuyen** propiedades a la recta en la esfera, separa la esfera en dos semiesferas. **Dimensionan** las superficies.	**Sobreponiendo** la cuerda en la representación de la recta en la esfera. **Reconociendo** que las rectas en ambas superficie tiene puntos. **Justificando** que las circunferencias menores no son rectas.
En la discusión de equipo, la CPa1 confirma que V-CPa1-S1|1:17:58-1:54:52|: "Las diferencias es que la línea en la esfera es finita porque vuelve al mismo lugar donde comenzó y mientras que en el plano sigue verdad, y las representaciones son diferentes". Ante ello, la CPa3 menciona V-CPa3-S1|1:18:12-1:54:52|: "Casi lo mismo, se mantiene en la esfera y en la otra con la cuerda tensa… [cuando la CPa1 le pregunta por la diferencia] solo se puede representar una circunferencia máxima, que pase por esos dos puntos, porque aquí la cuerda ya no queda tensa, entonces no divide en dos". Cuando el IP les pregunta por la diferencia, la V-CPa1-S1|1:19:59-1:20:11|: "Y la diferencia es que en la esfera, al momento de trazarla, vuelve al mismo punto y en el plano no; en el plano es infinito".	**Atribuyen** propiedades a la recta dependiendo de la superficie en la que está. **Diferencian** las representaciones de rectas. **Reconocen** que en ambas superficies las cuerdas tensan muestran las líneas rectas.	**Aceptando** que la representación de recta en la esfera es una circunferencia máxima.

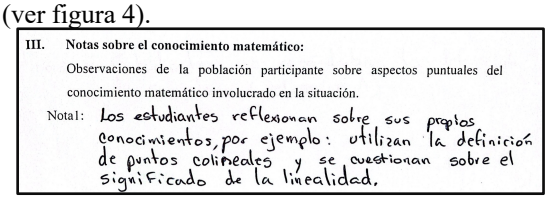
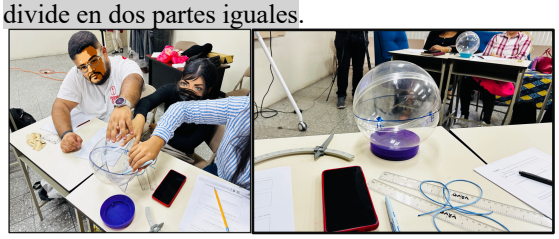
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el por qué y para qué lo hace.
Transfieren la rectitud de la recta a un segmento; relacionan a la recta con el ángulo recto (por su nombre); componen una recta por puntos sucesivos; organizan sus puntos de forma colineal; relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra; reconocen que una cuerda tensa entre dos puntos, en cualquier superficie, representa un segmento; trazan rectas en el plano y en la esfera; prueban la rectitud de la recta esférica tensando la cuerda sobre ella; procuran, en la esfera, tesar la cuerda en circunferencias menores; relacionan la recta con la distancia más corta entre dos puntos y ésta con el trayecto de los aviones; para **interpretar la rectitud de la recta**.

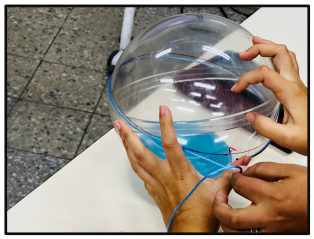
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el por qué y para qué lo hace.
Componen una recta por puntos sucesivos y segmentos; organizan sus puntos de forma colineal; relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra; trazan rectas en el plano y en la esfera; trasladan la infinitud de la recta plana a la esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran; prueban la rectitud de la recta esférica tensando la cuerda sobre ella; procuran tesar la cuerda en circunferencias menores; dimensionan la recta y las superficies; diferencian las representaciones de recta; transfieren propiedades de las superficies a sus representaciones de rectas; representan propiedades a través de símbolos (las flechas en sus representaciones de recta plana); **para reconocer propiedades de la recta** (está compuestas por infinitos puntos, la densidad de la recta plana y esférica, la infinitud de la recta plana y lo ilimitado de la recta esférica, las rectas pueden prolongarse o extenderse, las rectas tienen una dimensión, dividen al plano en dos semiplanos y dividen a la esfera en dos semiesferas). Transfieren la rectitud de la recta a un segmento; prolongan o extienden el segmento; sobreponen segmentos; dimensionan segmentos y sus superficies; identifican, en la esfera, dos segmentos de recta entre dos puntos no opuesto e infinitos segmentos entre dos puntos opuestos; diferencian las representaciones de segmentos planos y esféricos; para **reconocer propiedades del segmento** (puede prolongarse o extenderse, entre dos puntos en la esfera puede haber dos o infinitos segmentos de rectas entre ellos). Componen una recta por puntos sucesivos y segmentos; organizan sus puntos de forma colineal; relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra; trazan rectas en el plano y en la esfera; trasladan la infinitud de la recta plana a la esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran; prueban la rectitud de la recta esférica tensando la cuerda sobre ella; procuran tesar la cuerda en circunferencias menores; dimensionan la recta y las superficies; diferencian las superficies y las representaciones de recta; transfieren propiedades de las superficies a sus representaciones de rectas; interpretan la rectitud de las dos representaciones de recta; atribuyen propiedades de la recta dependiendo de la superficie; relacionan circunferencia máxima con distancia más corta y distancia más corta con recta esférica; **para reconocer dos representaciones de recta**, la plana y la esférica.

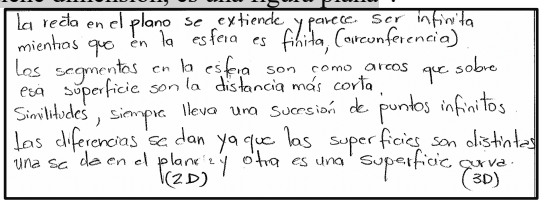
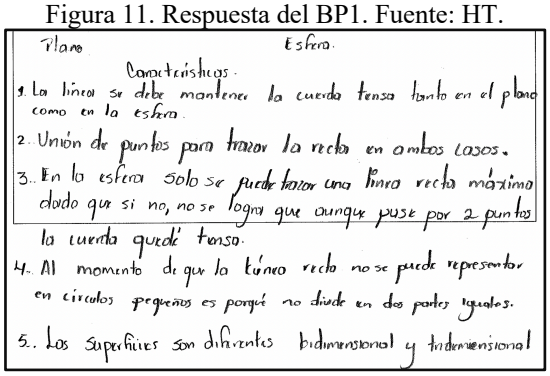
1-2 Análisis de usos: introducción y parte I

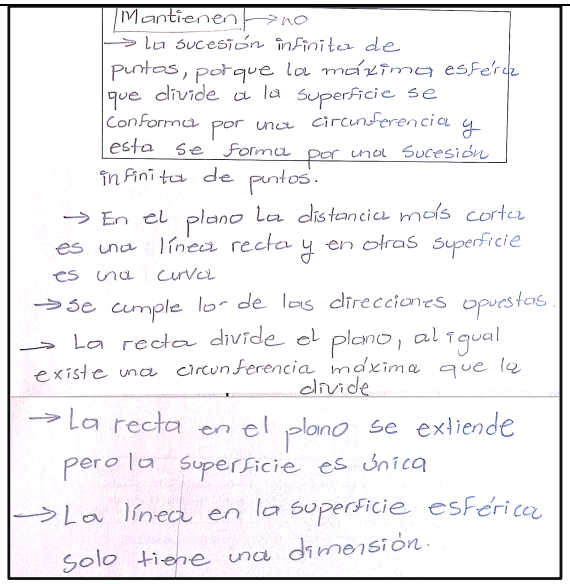
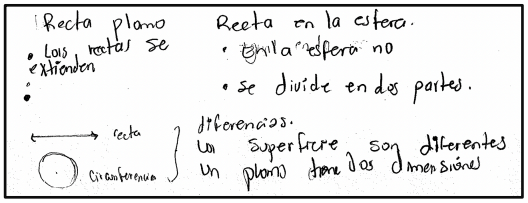
En el papel que desempeña la noción matemática en la tarea se hará una distinción entre el plano [p] y la esfera [E]. En la tabla anterior (análisis de acciones y actividades), se marcarán las acciones y actividades donde estén involucradas las nociones matemáticas de interés.

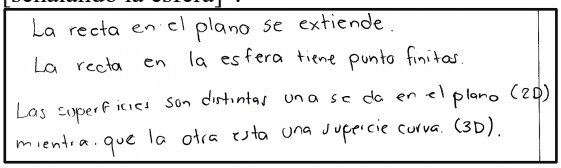
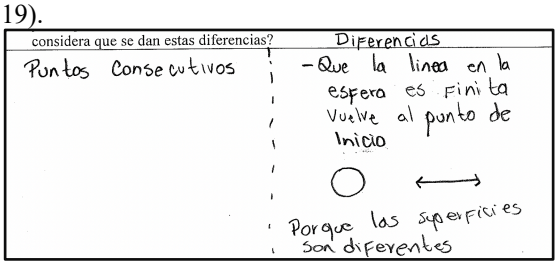
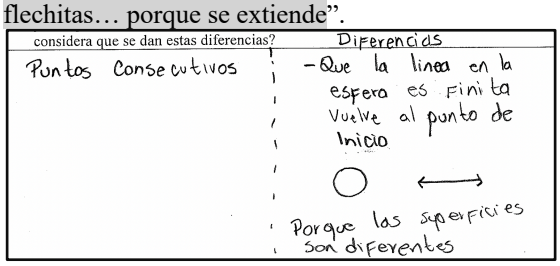
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Recta y segmento de recta plano y esférico			
En las acciones	**Transfieren** la rectitud de la recta a un segmento.	V-APa1-S1|0:15:06-0:15:30|: "Una vez que usted empieza a trazar, tiene la misma dirección. Por ejemplo, aquí, cuando lo hice, si se fija, empecé a trazar así. Bueno, este es un segmento; eso es lo que la hace, para mí, recta".	Construyendo un segmento usando una regla plana y caracterizando la rectitud de la recta a través de la rectitud del segmento.	**Recta compuesta** por puntos y segmentos [P,E]. La **recta transfiere** sus propiedades al segmento [P, E].
	Relacionan a la recta con el ángulo recto (por el nombre).	V-AP3-S1|0:30:39-0:18:10|: "No sé, siento que va tirando por el lado de ángulos, porque se menciona línea recta, puede ser porque hay un ángulo de 90 grados, porque es el ángulo recto". El IP le cuestiona, 90 grados con qué, V-AP3-S1|0:30:39-0:18:10|: "En función al plano en el que está esa recta".	Al intentar caracterizar la rectitud de la recta, asocia el nombre de línea recta con ángulo recto; sin embargo, al pedir una referencia, lo relaciona al plano.	**Recta dependiente** de la superficie [P, E].
	Componen una recta por puntos sucesivos y **organizan** sus puntos de forma colineal.	Por su parte, APa2 menciona V-APa2-S1|0:15:32-0:15:30|: "Una sucesión de infinitos puntos colineales y dos puntos definen una recta". Por su parte, V-AP3-S1|0:16:46-0:17:00|: "Para mí, dos puntos definen una línea recta"; luego discuten que, si se tienen tres puntos, deben ser colineales. El IP discute con el equipo sobre la posibilidad de unir esos dos puntos con líneas curvas, entonces el V-AP3-S1|0:18:06-0:18:10|: "Creo que entonces está mejor la de ellas [refiere a APa2], que son infinitos puntos colineales".	Caracterizando la rectitud de la recta a través de la posición de los puntos, ubicándolos de manera colineal (como una forma de ubicar los puntos) y hasta el infinito. Buscan definir la recta a través de la organización de puntos.	**Recta compuesta** por puntos colineales [P,E]. **Recta infinita** [P] Recta como la **unión de dos puntos**.
		En la discusión, V-BPa2-S1|0:18:23-0:18:33|: "Que tiene infinitos puntos". Ante ello, V-BP1-S1|0:19:21-0:19:27|: "Yo puse que estaban en el mismo plano, no tiene dimensión y no se tiene una definición clara". Los tres miembros del equipo mencionan estar de acuerdo en que la recta no tiene dimensión. Cuando escuchan la discusión del equipo A, V-BPa2-S1|0:18:23-0:18:33|: "Colineales, esa es la palabra que me hacía falta, porque solo diciendo los puntos pude ser una curva".  Figura 11. Respuesta del BP1. Fuente: HT.	Observando infinitos puntos en su representación en el plano. Reconociendo que la recta está compuesta por puntos, pero que tal como lo dijo el otro equipo, esos puntos deben ser colineales y tender al infinito (en el plano).	**Recta compuesta** por puntos infinitos [P]. **Recta compuesta** por puntos colineales [P,E]. **Recta infinita** [P].
		En la discusión, V-CPa1-S1|0:22:45-0:22:28|: "Al momento de trazarla no se levanta el lápiz y está	Es trazada sin levantar el lapiz para indicar que son puntos consecutivos.	**Recta compuesta** por puntos consecutivos [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		unida de puntos consecutivos", las dos profesoras mencionan estar de acuerdo.		
	Relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra.	El IP cuestiona el significado de colineales, V-APa1-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están en la misma dirección", V-AP3-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están seguidos", V-APa1-S1|0:27:00-0:27:05|: "Dos direcciones, pero una opuesta a la inicial". En la DG, el investigador-observador nota que el significado de linealidad es cuestionado a partir de la colinealidad (ver figura 4).  III. Notas sobre el conocimiento matemático: Observaciones de la población participante sobre aspectos puntuales del conocimiento matemático involucrado en la situación. Nota1: Los estudiantes reflexionan sobre sus propios conocimientos, por ejemplo: utilizan la definición de puntos colineales y se cuestionan sobre el significado de la linealidad. Figura 4. Nota de investigador-observador sobre los puntos colineales. Fuente: NIO.	Interpretando la colinealidad de los puntos de una recta, primero que están en la misma dirección y luego en dos direcciones, una opuesta a la otra. Además, fue necesaria la aclaración de que son puntos seguidos.	**Recta compuesta** por puntos, seguidos y colineales [P, E]. **Recta como dos direcciones,** una opuesta a la otra [P].
	Reconocen que una cuerda tensa entre dos puntos, en cualquier superficie, representa un segmento.	(T2 y T3) Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento. Figura 10. Respuesta de BP1. Fuente: HT.	Exponen la condición en la que debe estar una cuerda para representar la distancia más corta entre dos puntos.	Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos** [P]. Segmento como una **cuerda tensa entre dos puntos** [P, E].
		Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento".	Diferencian una recta de un segmento, indicando que un segmento tiene extremos.	El segmento **tiene extremos** [P, E].
	Trazan rectas en el plano y en la esfera.	En la discusión en equipo, la APa1 menciona que V-APa1-S1|0:15:06-0:15:30|: "Una vez que usted empieza a trazar, tiene la misma dirección. Por ejemplo, aquí, cuando lo hice, si se fija, empecé a trazar así. Bueno, este es un segmento; eso es lo que la hace, para mí, recta".	Asociando la dirección a la forma de trazar la recta, empiezas y luego mantienes la dirección.	**Recta como una dirección** [P].
		Concluyen que la circunferencia máxima es la representación de la línea recta en la esfera y que la divide en dos partes iguales.  Figura 6. El equipo A traza la recta que pasa por A y B. Fuente: Fotografía-Sesión 1.	Usando la regla esférica trazan la circunferencia máxima que pasa por A y B. Con esta recta esférica dividen a la esfera en dos semiesferas.	Recta como **elemento divisor** de la superficie [E]. Recta como **eje de simetría** [E].
		En la discusión, V-CPa1-S1|0:22:45-0:22:28|: "Al momento de trazarla no se levanta el lápiz y está unida de puntos consecutivos", las dos profesoras	Trazando la recta sin levantar el lápiz para indicar que los puntos son consecutivos.	**Recta compuesta** por puntos consecutivos que tienden al infinito [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		mencionan estar de acuerdo. Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende".	Agregan símbolos, como las fechas, para indicar que tiene la posibilidad de extenderse y es infinita.	**Recta infinita** [P]. **Recta extensible** [P].
	Prueban la rectitud de la recta esférica tensando una cuerda sobre ella. **Procuran,** en la esfera, tesar la cuerda en circunferencias menores	Después de tensar la cuerda sobre la representación de la circunferencia máxima, se les pregunta si en otras circunferencias también podemos tensar la cuerda. Responden que sí, pero al intentar tensar la cuerda en circunferencias más pequeñas, reconocen que no. Al preguntar por la diferencia de esa circunferencia y las otras más pequeñas, la V-APa1-S1|1:04:10-1:04:27|: "Puede ser la misma distancia, nosotros lo hicimos al azar, o sea, casi todos lo hicimos como al centro, a la mitad de la esfera puede ser que sea la misma distancia que hay desde aquí hasta arriba y desde aquí hasta abajo [señala desde la recta hasta el polo superior y desde la recta hasta el polo inferior (ver figura 7)]", de ahí, reconocen que divide a la esfera en dos partes iguales. Figura 7. APa1 señala las dos semiesferas. Fuente: Video-Sesión 1.	Colocando la cuerda tensa sobre la representación de recta que trazaron con la regla esférica. Seguidamente tratan de tensar la cuerda en circunferencias menores, pero descubren que solo se puede tensar en una circunferencia máxima. Diferenciando las circunferencias máximas y menores identifican que las máxima dividen a la esfera en dos partes iguales.	Recta como **cuerda tensa** [E]. Recta **como circunferencia máxima** [E]. Recta como **elemento divisor** de la superficie [E]. Recta como **eje de simetría** [E].
		Para verificar que la representación trazada era una línea recta, tensaron la cuerda sobre la representación (ver figura 18). Al discutir sobre el tamaño de la circunferencia que pasa por A y B, reconocen que no se pueden construir circunferencias más grandes en esa esfera, por lo que este tipo de circunferencia serían las líneas rectas en la superficie de la esfera.  Figura 18. CPa1 y CPa2 tensan la cuerda sobre una recta esférica. Fuente: Fotografía-sesión 1.	Sobreponen la cuerda en la representación de la recta para verificar si se mantiene tensa. Al reconocer que en otras circunferencias (menores) no se mantiene tensa, asocian la circunferencia máxima a la recta en la esfera.	Recta como **cuerda tensa** [E]. Recta **como circunferencia máxima** [E].
	Relacionan la recta con la distancia más corta entre dos	El V-AP3-S1|0:42:08-0:42:47|: "En este momento se me venía a la mente; una vez estaba viendo un video acerca de cómo vuelan los aviones y por qué los aviones no vuelan en línea recta. Decían que volar en línea recta no era eficiente para los aviones porque	Presentando una analogía entre el trayecto del vuelo de los aviones, la distancia más corta y la noción de recta plana. Reconocen el efecto	Recta (percepción de recta plana en la esfera) **como una mayor distancia** (P).

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	puntos y ésta con el trayecto de los aviones.	se tardaban más, entonces que lo hacían en función a la curva de la Tierra. Yo decía: Pero ¿cómo?, si en el espacio se puede volar en línea recta. Entonces, mencionaban que muchas veces la distancia en línea recta no es la más corta, sino que en otra superficie es una curva, pero no sé de dónde surge esa noción".	de la curvatura de la Tierra en el trayecto que toman los aviones.	Recta **independiente de una superficie** (recta en el espacio) [P]. Recta **dependiente de la superficie** [E].
	Trasladan la infinitud de la recta plana a la esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran.	Ante la pregunta por la cantidad de segmentos entre el punto A y B, el V-AP3-S1|0:51:34-0:51:37|: menciona que infinitos. Después de la presentación de las profesoras CPa1 y CPa3 de los dos segmentos entre A y B, el V-AP3-S1|0:52:57-0:53:02|: "Yo diría uno que empiece en A, dé la vuelta y termine en B". El IP pregunta por qué sobrepondríamos la cuerda nuevamente, a lo que el AP3 menciona que podríamos dar la cantidad de vueltas que quisiéramos porque la línea recta en el plano se puede extender. El IP hace una explicación sobre lo ilimitado de la superficie de la esfera.	Con la cuerda dan una vuelta completa y vuelven a sobreponer cuerda sobre la geodésica AB. Reconocen que dado que en el plano la recta es infinita en la esfera podemos dar la cantidad de vueltas que queramos, es decir puede extenderse de forma ilimitada en una superficie finita.	**Recta infinita** [P]. **Recta ilimitada** [E]. **Recta extensible** [P, E].
	Dimensionan la recta y las superficies.	Cuando se discute con todo el grupo y el IP cuestiona la idea del equipo B, de que la recta no tiene dimensión, V-APa2-S1|0:29:16-0:29:17|: "Tiene una".	Discutiendo sobre si la recta tiene o no dimension. Concluyen que tiene una dimensión.	Recta como la **representación de una dimensión del espacio** [P].
		V-BP1-S1|0:19:21-0:19:27|: "Yo puse que estaban en el mismo plano, no tiene dimensión y no se tiene una definición clara". Los tres miembros del equipo mencionan estar de acuerdo en que la recta no tiene dimensión. Cuando estaban escribiendo sus respuestas, V-BPa3-S1|0:22:24-0:22:28|: "Como no tiene dimensión, es una figura plana".	Asocian la dimensión con la profundidad de un objeto, por ello, mencionan que al no tener dimensión entonces es una figura plana.	**Recta ligada al plano** [P]. Recta **con una dimensión espacial, longitud** [P].
		 La recta en el plano se extiende y parece ser infinita mientras que en la esfera es finita, (circunferencia). Los segmentos en la esfera son como arcos que sobre esa superficie son la distancia más corta. Similitudes, siempre lleva una sucesión de puntos infinitos. Las diferencias se dan ya que las superficies son distintas una se da en el plano (2D) y otra es una superficie curva. (3D) Figura 11. Respuesta del BP1. Fuente: HT.	Justificando las diferencias en las representaciones de recta en ambas superficies por ser superficies diferentes, una en dos dimensiones y la otra en tres.	Recta **dependiente de la superficie** [P, E].
		 Plano Esfera. Características. 1. La línea se debe mantener la cuerda tensa tanto en el plano como en la esfera. 2. Unión de puntos para trazar la recta en ambos casos. 3. En la esfera solo se puede trazar una línea recta máxima dado que si no, no se logra que aunque puse por 2 puntos la cuerda quedé tensa. 4. Al momento de que la línea recta no se puede representar en círculos pequeños es porque no divide en dos partes iguales. 5. Las superficies son diferentes bidimensional y tridimensional Figura 20. Respuesta de la CPa3. Fuente: HT.	Justificando las diferencias en las representaciones de recta en ambas superficies por ser superficies diferentes, una en dos dimensiones y la otra en tres.	Recta **dependiente de la superficie** [P, E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Diferencian las representaciones de recta.	 Figura 8. Respuesta de APa1 para la T9. Fuente: HT.	Reconociendo que en ambas representaciones de recta, tienen una sucesión de infinitos puntos, porque reconocen que una circunferencia tiene infinitos puntos. A pesar de haber declarado que la circunferencia máxima es la representación de recta en la esfera, menciona que la distancia más corta en el plano es la recta y en la esfera una curva.	**Recta compuesta** por infinitos puntos sucesivos [P, E]. Recta como la **distancia más corta** entre dos puntos [P, E]. Recta **desde dos direcciones opuestas [P, E]**. Recta como **elemento divisor** de la superficie [E]. Recta como **eje de simetría** [E]. **Recta extensible** [P]. Recta **con una dimensión espacial, longitud** [P].
		 Figura 13. Respuesta de la BPa3. Fuente HT. la CPa1 confirma que V-CPa1-S1|1:17:58-1:54:52|: "Las diferencias es que la línea en la esfera es finita porque vuelve al mismo lugar donde comenzó y mientras que en el plano sigue verdad, y las representaciones son diferentes". Ante ello, la CPa3 menciona V-CPa3-S1|1:18:12-1:54:52|: "Casi lo mismo, se mantiene en la esfera y en la otra con la cuerda tensa… [cuando la CPa1 le pregunta por la diferencia] solo se puede representar una circunferencia máxima, que pase por esos dos puntos, porque aquí la cuerda ya no queda tensa, entonces no divide en dos". Cuando el IP les pregunta por la diferencia, la V-CPa1-S1|1:19:59-1:20:11|: "Y la diferencia es que en la esfera, al momento de trazarla, vuelve al mismo punto y en el plano no; en el plano es infinito".	Bosquejando las representaciones de las rectas en sus hojas de papel. Al indicar que en el plano se extienden están indicando que son infinitas. En la esfera, aunque se podrían dar muchas vueltas, la represetación seguiría siendo una circunferencia máxima. Refiriendo a que en el trazo en la esfera se regresa al punto de inicio del trazo, por lo que es finita, en cambio en el plano siempre se puede extender.	**Recta extensible** [P]. **Recta infinita** [P]. **Recta finita-ilimitada** [E]. **Recta extensible** [P]. **Recta como la cuerda tensa** [P, E]. Recta como **elemento divisor** de la superficie [E]. Recta como **eje de simetría** [E]. **Recta infinita** [P].
	Transfieren propiedades de las superficies a sus representaciones de rectas.	Agregando a la discusión el AP3-S1|1:14:40-1:14:37|: "Lo que yo puse de diferente es que hay una recta máxima porque la superficie es finita, entonces va a haber una recta máxima y esa va a definir todo en la superficie que estamos estudiando". En sus HT, centran sus diferencias en las superficies (ver figura12). Además, los 3 miembros del equipo	Deduciendo que dado que la superficie es finita, tiene sentido que existean circunferencias máximas. Además, una vez que se construya la idea de recta, va a definir más geometría en esa supeficie.	**Recta como circunferencia máxima** en superficie finita [E]. **Recta generadora de geometría o noción básica** [E]. **Recta finita-ilimitada** [E].

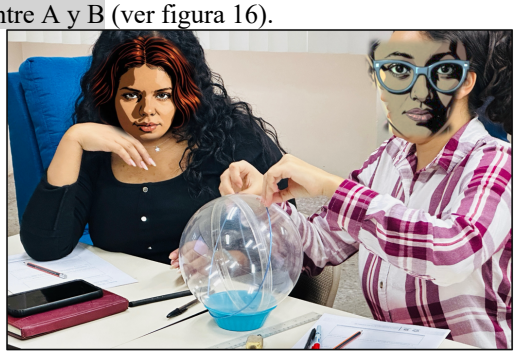
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		están de acuerdo en que la recta esférica es finita; no hacen referencia a la ilimitación de la que se habló en la discusión de grupo anteriormente. En la discusión en equipos, la BPA3 confirma diciendo V-BPa3-S1|1:16:12-1:16:15|: "Aquí son finitas [señalando la esfera]".	Al diferenciar las representaciones de rectas, se enfocan en las diferencias en las superficies, indicando las dimensiones de cada superficie. Con ello, indican que la recta en el plano se extiende, y en la esfera es finita.	**Recta finita-ilimitada** [E]. **Recta extensible** [P]. **Recta infinita** [P].
		 Figura 12. Respuesta de la BPa2. Fuente: HT.		
		En las HT, la CPa1 habla de la finitud de la recta en la esfera consecuencia de esta superficie (ver figura 19).	Dado que la representación de la recta esférica es una circunferencia, deducen que es finita.	**Recta finita-ilimitada** [E]. Recta **compuesta por puntos consecutivos** [P]. **Recta infinita** [P].
		 Figura 19. Respuesta de la CPa1. Fuente: HT		
		La V-CPa1-S1|1:19:59-1:20:11|: "Y la diferencia es que en la esfera, al momento de trazarla, vuelve al mismo punto y en el plano no; en el plano es infinito".	Dado que la representación de la recta esférica es una circunferencia, deducen que es finita.	
	Representa n propiedades a través de símbolos.	Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende".	Diferencia la recta del segmento, indicando que el segmento tiene extremos. Agregando flechas en los extremos indican que la recta en el plano es infinita.	**Recta finita-ilimitada** [E]. Recta **compuesta por puntos consecutivos** [P]. **Recta infinita** [P]. **Recta infinita** [P]. El **segmento tiene extremos** [P, E].
		 Figura 19. Respuesta de la CPa1. Fuente: HT		
	Prolongan o extienden segmentos.	En la discusión en equipo, la APa1 menciona que V-APa1-S1|0:15:06-0:15:30|: "Una vez que usted empieza a trazar, tiene la misma dirección. Por ejemplo, aquí, cuando lo hice, si se fija, empecé a trazar así. Bueno, este es un segmento; eso es lo que la hace, para mí, recta".	Empieza a trazar la recta manteniendo la misma dirección, traza un segmento, pero indica que es un segmento rescatando el proceso de construcción.	**Recta desde una dirección** [P]. **Segmento extensible** [P].

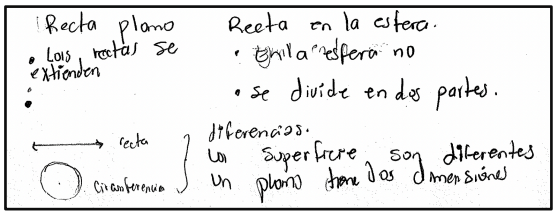
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende".	Diferenciando una recta de un segmento, dado que un segmento tiene extremos. Además, agregan flechas a su representación para indicar que puede extenderse tanto como se quiera.	**Segmento extensible** [P]. **Recta infinita** [P].
	Sobreponen segmentos.	Ante la pregunta por la cantidad de segmentos entre el punto A y B, el V-AP3-S1|0:51:34-0:51:37|: menciona que infinitos. Después de la presentación de las profesoras CPa1 y CPa3 de los dos segmentos entre A y B, el V-AP3-S1|0:52:57-0:53:02|: "Yo diría uno que empiece en A, dé la vuelta y termine en B". El IP pregunta por qué sobrepondríamos la cuerda nuevamente, a lo que el AP3 menciona que podríamos dar la cantidad de vueltas que quisiéramos porque la línea recta en el plano se puede extender. El IP hace una explicación sobre lo ilimitado de la superficie de la esfera.	Sobreponen la cuerda sobre la representación de una circunferencia máxima, pasando dos veces sobre el segmento AB.	**Recta infinita** [P]. **Recta ilimitada** [E]. **Segmento extensible** [E].
	Identifican, en la esfera, dos segmentos de recta entre dos puntos no opuesto e infinitos segmentos entre dos puntos opuestos.	Como el AP3 menciona que entre el punto A y B pueden tener infinitos segmentos, el IP les pide que muestre otros segmentos entre estos puntos; por ello, CPa1 primero muestra la cuerda doblada, indicando varias veces la misma distancia entre A y B (ver figura 15), al indicarle que son segmentos que deben estar sobre la superficie, muestran el otro segmento entre A y B (ver figura 16). Figura 16. CPa1 muestra dos distancia cortas entre A y B. Fuente: Fotografía-Sesión 1.	Señalando con la cuerda los dos segmentos de recta que existente entre le punto AB.	**Dos puntos no opuestos definen dos segmentos de recta** [E].
		Cuando se presenta el caso de los puntos opuestos y se pregunta por la cantidad de segmentos entre ellos, la V-CPa1-S1|0:54:51-0:54:52|: "Infinitos". Al pedirle que muestre más de dos, presenta los casos de la figura 17, para concluir que son infinitos. Cuando se les pregunta por la diferencia entre los puntos que marcaron ellos y los puntos que yo señalé, la V-CPa1-S1|0:56:17-0:56:18|: "Están opuestos".	Reconociendo infinitos segmentos entre dos puntos opuestos en la esfera.	**Dos puntos opuestos definen infinitos segmentos de recta** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Relacionan circunferencia máxima con distancia más corta y distancia más corta con recta esférica.	 Figura 17. CPa1 presenta varias distancias cortas entre el punto A y B. Fuente: Video y fotografía-Sesión 1. (T5) En la discusión grupal, sobre la posibilidad de tener distancias más cortas entre dos puntos en otras superficies, V-BP1-S1|0:41:50-0:19:27|: "En esa superficie, sí, pero no sería recta" [reconocen a la representación como el objeto mismo]. (T8) En esta tarea, además de hacer la representación, con la discusión con el grupo concluyen que la circunferencia máxima es la representación de la línea recta en la esfera y que la divide en dos partes iguales.	Reconocen que se pueden tener representar distancias más cortas en la esfera, pero dejarían de ser rectas (pensando en rectas planas). Finalmente, relacionan la circucnferencia máxima como la línea recta en la esfera.	Recta **como circunferencia máxima** [E].
		Ángulo plano y esférico		
		Recta y segmento de recta plano y esférico		
En las actividades	**Interpretan** la rectitud de la recta.	V-APa1-S1|0:15:06-0:15:30|: "Una vez que usted empieza a trazar, tiene la misma dirección. Por ejemplo, aquí, cuando lo hice, si se fija, empecé a trazar así. Bueno, este es un segmento; eso es lo que la hace, para mí, recta", esto fue una de las notas del investigador-observador (ver figura 3). Por su parte, APa2 menciona V-APa2-S1|0:15:32-0:15:30|: "Una sucesión de infinitos puntos colineales y dos puntos definen una recta". De ahí, APa1 reconoce que la unión de las dos son esas características, y APa2 agrega V-APa2-S1|0:15:59-0:16:03|: "Tiene la misma dirección; si no, no sería línea recta". Por su parte, V-AP3-S1|0:16:46-0:17:00|: "Para mí, dos puntos definen una línea recta"; luego discuten que, si se tienen tres puntos, deben ser colineales. El IP cuestiona el significado de colineales, V-APa1-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están en la misma dirección", V-AP3-S1|0:26:24-0:26:30|: "Que están seguidos", V-APa1-S1|0:27:00-0:27:05|: "Dos direcciones, pero una opuesta a la inicial". Cuando se discute con todo el grupo y el IP cuestiona la idea del equipo B, de que la recta no tiene dimensión, V-APa2-S1|0:29:16-0:29:17|: "Tiene una". Cuando escuchan la discusión del equipo A, V-BPa2-S1|0:18:23-0:18:33|: "Colineales, esa es la palabra que me hacía falta, porque solo diciendo los puntos pude ser una curva". Cuando estaban escribiendo sus respuestas, V-BPa3-S1|0:22:24-	Transfieren la rectitud de la recta a un segmento; relacionan a la recta con el ángulo recto (por su nombre); componen una recta por puntos sucesivos; organizan sus puntos de forma colineal; relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra; reconocen que una cuerda tensa entre dos puntos, en cualquier superficie, representa un segmento; trazan rectas en el plano y en la esfera; prueban la rectitud de la recta esférica tensando la cuerda sobre ella; procuran, en la esfera, tesar la cuerda en circunferencias menores; relacionan la recta con la distancia más corta entre dos puntos y ésta con el trayecto de los aviones.	La **recta transfiere sus propiedades al segmento** [P, E]. Recta **compuesta por infinitos puntos sucesivos y colineales** [P]. Recta **compuesta por puntos sucesivos colineales** [E]. **Recta desde dos direcciones**, una opuesta a la otra [P, E]. Segmento como la **tensión de una cuerda** entre esos puntos [P, E]. **Recta como una cuerda tensa** [E]. Recta **como una circunferencia máxima** [E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		0:22:28|: "Como no tiene dimensión, es una figura plana". En la discusión con todo el grupo, el IP cuestiona la idea del equipo C sobre que al momento de trazar la recta no se levanta el lápiz, V-BPa2-S1|0:29:59-0:18:33|: "No, no necesariamente". V-CPa1-S1|0:22:45-0:22:28|: "Al momento de trazarla no se levanta el lápiz y está unida de puntos consecutivos", las dos profesoras mencionan estar de acuerdo. Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende".		
	Reconocen propiedades de la recta.	V-APa2-S1|0:15:32-0:15:30|: "Una sucesión de infinitos puntos colineales y dos puntos definen una recta". De ahí, APa1 reconoce que la unión de las dos son esas características, y APa2 agrega V-APa2-S1|0:15:59-0:16:03|: "Tiene la misma dirección; si no, no sería línea recta". Por su parte, V-AP3-S1|0:16:46-0:17:00|: "Para mí, dos puntos definen una línea recta"; luego discuten que, si se tienen tres puntos, deben ser colineales. El IP discute con el equipo sobre la posibilidad de unir esos dos puntos con líneas curvas, entonces el V-AP3-S1|0:18:06-0:18:10|: "Creo que entonces está mejor la de ellas [refiere a APa2], que son infinitos puntos colineales". V-AP3-S1|0:52:57-0:53:02|: "Yo diría uno que empiece en A, dé la vuelta y termine en B". El IP pregunta por qué sobrepondríamos la cuerda nuevamente, a lo que el AP3 menciona que podríamos dar la cantidad de vueltas que quisiéramos porque la línea recta en el plano se puede extender. Después de tensar la cuerda sobre la representación de la circunferencia máxima, se les pregunta si en otras circunferencias también podemos tensar la cuerda. Responden que sí, pero al intentar tensar la cuerda en circunferencias más pequeñas, reconocen que no. Al preguntar por la diferencia de esa circunferencia y las otras más pequeñas, la V-APa1-S1|1:04:10-1:04:27|: "Puede ser la misma distancia, nosotros lo hicimos al azar, o sea, casi todos lo hicimos como al centro, a la mitad de la esfera puede ser que sea la misma distancia que hay desde aquí hasta arriba y desde aquí hasta abajo [señala desde la recta hasta el polo superior y desde la recta hasta el polo inferior (ver figura 7)]", de ahí, reconocen que divide a la esfera en dos partes iguales.	Componen una recta por puntos sucesivos y segmentos; organizan sus puntos de forma colineal; relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra; trazan rectas en el plano y en la esfera; trasladan la infinitud de la recta plana a la esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran; prueban la rectitud de la recta esférica tensando la cuerda sobre ella; procuran tesar la cuerda en circunferencias menores; dimensionan la recta y las superficies; diferencian las representaciones de recta; transfieren propiedades de las superficies a sus representaciones de rectas; representan propiedades a través de símbolos (las flechas en sus representaciones de recta plana).	Recta **compuesta por puntos sucesivos colineales y segmentos** [P, E]. **Recta extensible** [P,E]. Recta **desde dos direcciones opuestas** [P, E]. **Recta infinita** [P]. **Recta finita-ilimitada** [E]. Recta como **una cuerda tensa** [E]. Recta como **una circunferencia máxima** [E]. Recta **con una dimensión espacial, longitud** [P]. Recta como **elemento divisor** de la superficie [E]. Recta como **eje de simetría** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Agregando a la discusión el AP3-S1|1:14:40-1:14:37|: "Lo que yo puse de diferente es que hay una recta máxima porque la superficie es finita, entonces va a haber una recta máxima y esa va a definir todo en la superficie que estamos estudiando". V-CPa1-S1|0:22:45-0:22:28|: "Al momento de trazarla no se levanta el lápiz y está unida de puntos consecutivos", las dos profesoras mencionan estar de acuerdo. Cuando escuchan la discusión del equipo B, V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende". Para verificar que la representación trazada era una línea recta, tensaron la cuerda sobre la representación (ver figura 18). Al discutir sobre el tamaño de la circunferencia que pasa por A y B, reconocen que no se pueden construir circunferencias más grandes en esa esfera, por lo que este tipo de circunferencia serían las líneas rectas en la superficie de la esfera.		
	Reconocen propiedades del segmento.	V-APa1-S1|0:15:06-0:15:30|: "Una vez que usted empieza a trazar, tiene la misma dirección. Por ejemplo, aquí, cuando lo hice, si se fija, empecé a trazar así. Bueno, este es un segmento; eso es lo que la hace, para mí, recta". Estuvieron de acuerdo en que el segmento representa la distancia más corta entre dos puntos [generalización euclidiana] y que la cuerda entre esos puntos debe estar tensa para representar ese segmento. Ante la pregunta por la cantidad de segmentos entre el punto A y B, el V-AP3-S1|0:51:34-0:51:37|: menciona que infinitos. Después de la presentación de las profesoras CPa1 y CPa3 de los dos segmentos entre A y B, el V-AP3-S1|0:52:57-0:53:02|: "Yo diría uno que empiece en A, dé la vuelta y termine en B". El IP pregunta por qué sobrepondríamos la cuerda nuevamente, a lo que el AP3 menciona que podríamos dar la cantidad de vueltas que quisiéramos porque la línea recta en el plano se puede extender. El IP hace una explicación sobre lo ilimitado de la superficie de la esfera. Finalmente, después de indicar que pensamos en una sola vuelta, todos aceptan que hubiera dos segmentos de recta entre el punto A y B.	Transfieren la rectitud de la recta a un segmento; prolongan o extienden el segmento; sobreponen segmentos; dimensionan segmentos y sus superficies; identifican, en la esfera, dos segmentos de recta entre dos puntos no opuesto e infinitos segmentos entre dos puntos opuestos; diferencian las representaciones de segmentos planos y esféricos.	El **segmento adopta propiedades de la recta** [P, E]. **Segmento extensible** [P, E]. Segmento **como argumento** en la dedución de propiedades de la recta [E]. **Dos puntos definen un único segmento** [P]. **Dos puntos no opuestos definen dos segmentos** [E]. **Dos puntos opuestos definen infinitos segmentos** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		V-CPa1-S1|0:22:01-0:22:28|: "Pero es que cuando ya agregan dos puntos al final, es un segmento". Cuando en la discusión con todo el grupo se muestra la representación de recta por APa2, V-CPa1-S1|0:32:06-0:32:23|: "A mí me faltaron las flechitas… porque se extiende". Como el AP3 menciona que entre el punto A y B pueden tener infinitos segmentos, el IP les pide que muestre otros segmentos entre estos puntos; por ello, CPa1 primero muestra la cuerda doblada, indicando varias veces la misma distancia entre A y B (ver figura 15), al indicarle que son segmentos que deben estar sobre la superficie, muestran el otro segmento entre A y B (ver figura 16).  Figura 16. CPa1 muestra dos distancia cortas entre A y B. Fuente: Fotografía-Sesión 1. Cuando se presenta el caso de los puntos opuestos y se pregunta por la cantidad de segmentos entre ellos, la V-CPa1-S1|0:54:51-0:54:52|: "Infinitos". Al pedirle que muestre más de dos, presenta los casos de la figura 17, para concluir que son infinitos. Cuando se les pregunta por la diferencia entre los puntos que marcaron ellos y los puntos que yo señalé, la V-CPa1-S1|0:56:17-0:56:18|: "Están opuestos". Figura 17. CPa1 presenta varias distancias cortas entre el punto A y B. Fuente: Video y fotografía-Sesión 1.		
	Reconocen dos representaciones de recta.	Ahí reconocen que la recta en el plano divide al plano en dos semiplanos y en la esfera en dos hemisferios, sin embargo, según el investigador-observador no recuerdan la definición de semiplano (ver figura 9); V-APa2-S1|1:14:17-1:14:20|: "Entonces esa es otra característica". Agregando a la discusión el AP3-S1|1:14:40-1:14:37|: "Lo que yo puse de diferente es que hay una recta máxima porque la superficie es finita, entonces va a haber una	Componen una recta por puntos sucesivos y segmentos; organizan sus puntos de forma colineal; relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones, una opuesta a la otra; trazan rectas en el plano y en la esfera; trasladan la infinitud	Recta **compuesta por puntos sucesivos y colineales** [P, E]. Recta **compuesta por segmentos** [P, E]. Recta **desde dos direcciones opuestas** [P]. **Recta infinita** [P].

Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	recta máxima y esa va a definir todo en la superficie que estamos estudiando". Además de hacer la representación, con la discusión con el grupo concluyen que la circunferencia máxima es la representación de la línea recta en la esfera y que la divide en dos partes iguales. En sus HT, centran sus diferencias en las superficies (ver figura 11, 12 y 13). Además, los 3 miembros del equipo están de acuerdo en que la recta esférica es finita; no hacen referencia a la ilimitación de la que se habló en la discusión de grupo anteriormente. En la discusión en equipos, la BPA3 confirma diciendo V-BPa3-S1|1:16:12-1:16:15|: "Aquí son finitas [señalando la esfera]".  Figura 13. Respuesta de la BPa3. Fuente HT. La línea en la esfera es finita porque vuelve al mismo lugar donde comenzó y mientras que en el plano sigue verdad, y las representaciones son diferentes". Ante ello, la CPa3 menciona V-CPa3-S1|1:18:12-1:54:52|: "Casi lo mismo, se mantiene en la esfera y en la otra con la cuerda tensa… [cuando la CPa1 le pregunta por la diferencia] solo se puede representar una circunferencia máxima, que pase por esos dos puntos, porque aquí la cuerda ya no queda tensa, entonces no divide en dos". Cuando el IP les pregunta por la diferencia, la V-CPa1-S1|1:19:59-1:20:11|: "Y la diferencia es que en la esfera, al momento de trazarla, vuelve al mismo punto y en el plano no; en el plano es infinito".	de la recta plana a la esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran; prueban la rectitud de la recta esférica tensando la cuerda sobre ella; procuran tesar la cuerda en circunferencias menores; dimensionan la recta y las superficies; diferencian las superficies y las representaciones de recta; transfieren propiedades de las superficies a sus representaciones de rectas; interpretan la rectitud de las dos representaciones de recta; atribuyen propiedades de la recta dependiendo de la superficie; relacionan circunferencia máxima con distancia más corta y distancia más corta con recta esférica.	**Recta finita-ilimitada** [E]. **Recta como una cuerda tensa** [E]. **Recta como circunferencia máxima** [E]. Recta **con una dimensión espacial, longitud** [P]. **Recta como la distancia más cora entre dos puntos** [P, E].
Ángulo plano y esférico			

2. Parte II. Relación punto-recta (4 tareas)

1. Usando el transportador y la regla esférica tracen dos rectas (de otro color) perpendiculares a la recta que pasa por A y B o recta AB. Los dos puntos donde esas nuevas rectas se intersecan nómbrenlo C y D.

   Discusión sobre la siguiente situación: ¿si construyo otra línea recta perpendicular a la recta AB también pasará por los puntos C y D?, ¿por qué?

   Construyan otra recta perpendicular a AB y verifiquen la relación discutida anteriormente.
2. Discusión sobre la siguiente pregunta: ¿toda recta perpendicular a AB pasará por C y D?

   Construyan varias rectas perpendiculares a AB y verifiquen la relación discutida anteriormente.
3. En comparación con una circunferencia máxima completa, ¿cuál es la distancia entre C y la recta AB?, ¿cuál es la distancia entre D y la recta AB?, ¿es diferente en cada recta trazada?, ¿Por qué?

   Los puntos C y D son centros o polos de la circunferencia máxima o recta AB.
4. Establezca esta relación como una propiedad en esta geometría.

Hipótesis didáctica:

Aunque no se ha reflexionado sobre la relación de dos rectas, (T1) por construcción identificarán los dos puntos en los que se intersecan las dos nuevas rectas trazadas. Al construir otra recta perpendicular a la primera y verificar si se interseca en los puntos C y D, lograrán establecer una proposición como hipótesis, la cual van a probar empíricamente y generalizar al reflexionar si todas las rectas perpendiculares a la primera se intersecan en esos puntos y construir varios casos (T2). Reconocerán el cuarto de circunferencia máxima como un elemento importante en esa relación (T3). Finalmente, presentarán esa relación como una propiedad (T4).

Descripción general:

Construyen tres rectas perpendiculares a la recta AB y los puntos donde se intersecan los nombran punto C y D. Giran la esfera manteniendo estable la regla y hacen una analogía de las construcciones geométricas con nociones geográficas para deducir que toda recta que sea perpendicular a la recta AB se va a intersecar en los puntos C y D. Además, deducen que la distancia entre el punto C y la recta AB y entre el punto D y la recta AB es igual a ¼ de circunferencia máxima.

Descripción particular:

Equipo A:

(T1) Al dar las indicaciones de la construcción, V-AP3-S1|1:25:30-1:15:30|: “Una consulta, la otra parte de la recta no sería también perpendicular, al hacer el trazo por abajo”, el IP confirma su pregunta. La APa1 construye la primera recta perpendicular a la recta AB (ver figura 21).

Figura 21. La APa1 construye una recta perpendicular a la recta AB. Fuente: Fotografía-Sesión 1.

Al buscar trazar la segunda recta perpendicular a AB, V-AP3-S1|1:27:43-1:28:00|: “Entonces solo lo movemos así y ya sería otra perpendicular [señala el giro de la esfera manteniendo la regla, ver figura 22]”, esto también lo registra el investigador-profesor (ver figura 23).

Figura 22. El AP3 señala como construir más rectas perpendiculares. Fuente: Video-Sesión 1.

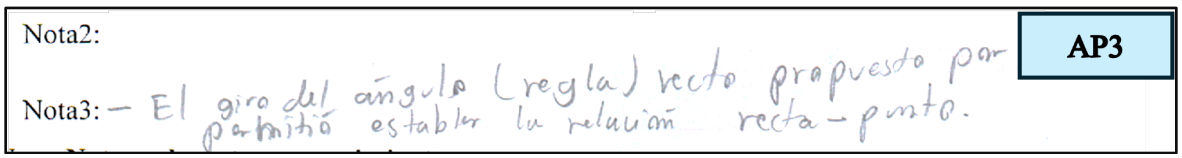


Figura 23. Nota de investigador-profesor sobre la estrategia de girar la regla. Fuente: NIP.

Después de que CPa1 dice que de esas construcciones deben llegar a una conclusión, el V-AP3-S1|1:36:17-1:36:21|: “Que por un punto pasan infinitas rectas, creo que por ahí va”. Mientras los demás equipos trazaban la

tercera recta perpendicular a AB, la APa2 estaba verificando la construcción de AB e identificando la distancia que había entre esa recta y los puntos C y D con el compás esférico (ver figura 24).

Figura 24. La APa2 identifica la distancia entre C y D con el compás esférico. Fuente: Video-Sesión 1.

Durante el tiempo de merienda, las profesoras APa1 y APa2 verificaron la perpendicularidad de las rectas construidas usando un transportador plano (ver figura 25). Esto también lo describe el investigador-observador (ver figura 26).

Figura 25. Verificación de perpendicularidad por APa1 y APa2. Fuente: Video-Sesión 1.

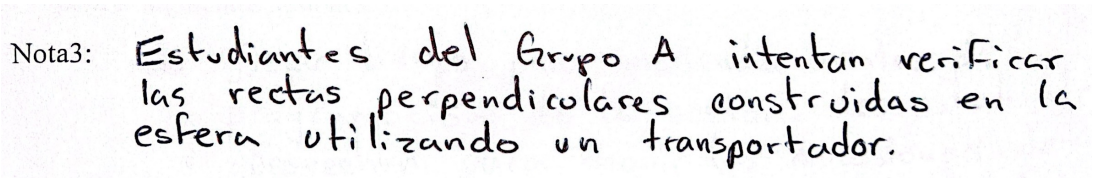


Figura 26. Nota de investigador-observador sobre la verificación de la perpendicularidad en la esfera. Fuente: NIO.

Ante la analogía que presenta el BP1, de esas construcciones con el globo terráqueo, la APa1, en sus hojas de trabajo, la retoma para justificar que toda recta que sea perpendicular pasará por los puntos C y D (ver figura 27).

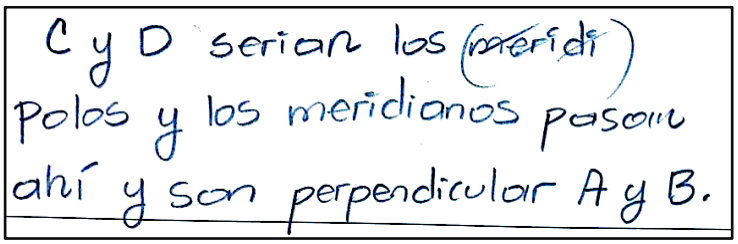


Figura 27. Respuesta T1 por APa1. Fuente: HT.

(T3) Ante la primera pregunta, el V-AP3-S1|1:48:27-1:48:30|: "1/2 [al preguntar si será la mitad de la recta completa], perdón, 1/4". Reconoce que desde C a AB y desde D a AB es ¼ de circunferencia, y en todas las rectas es la misma distancia. Al preguntar por qué, el V-AP3-S1|1:49:15-1:48:30|: "Porque esa [refiere a la recta AB] divide a la mitad esa circunferencia, ese hemisferio [se refiere a que divide a la esfera en dos hemisferios]".

(T4) En la discusión con todo el grupo, el V-AP3-S1|1:57:50-1:57:56|: "Bueno, lo que yo puse fue: una recta AB en una superficie esférica tiene infinitas rectas perpendiculares que se intersecan en los polos de la misma".

Equipo B:

(T1) Ante la pregunta ¿si construyo otra línea recta perpendicular a la recta AB también pasará por los puntos C y D?, ¿por qué?, el V-BP1-S1|1:34:51-0:19:27|: "Yo creo que por la analogía del planeta, donde estos dos serían como los polos [señala los puntos C y D], esta sería el ecuador [señala la recta AB], y estas serían los meridianos". El IP pregunta si todos los meridianos se tocan en los polos, y todos mencionan que sí.

(T4) En sus HT, el BP1 menciona que todas las rectas perpendiculares a la recta inicial se intersecan en sus polos y que la distancia de esos polos a la recta es ¼ de la recta dada (ver figura 28). El equipo completo comparte estas ideas.

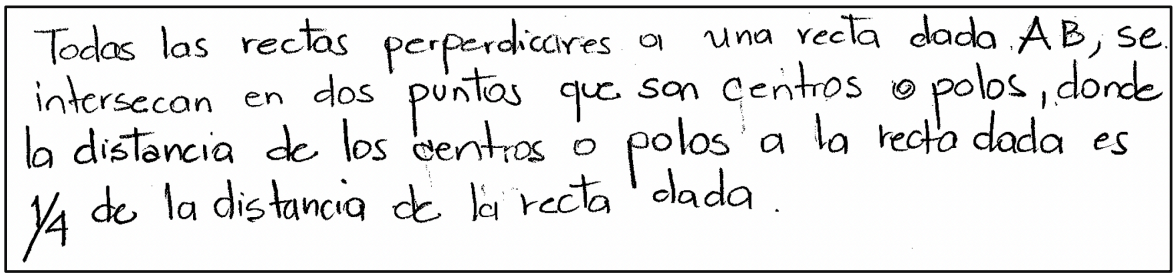


Figura 28. Respuesta T4 por BP. Fuente: HT.

Equipo C:

(T1) Después de la explicación de BP1, sobre la analogía de las ideas geométricas con el planeta Tierra, V-CPa1-S1|1:35:50-1:36:03|: "Yo no sé por qué, pero tenemos que deducir algo… tenemos que llegar a una conclusión".

(T2) En la discusión con todo el grupo, V-CPa3-S1|1:44:02-1:44:52|: "Sí, porque las rectas que trazamos perpendiculares a la recta AB van pasando por esos puntos, ya vimos 3 casos que sí se cumplió".

(T4) En la discusión con todo el grupo, V-CPa1-S1|1:57:16-1:57:31|: “Trazada una línea recta AB en la esfera, toda recta perpendicular a la recta AB se interseca en dos puntos, que serían C y D, y la medida es ¼ de la recta AB”.

2-1 Análisis de prácticas (acciones y actividades): parte II

<table>
<tr><th colspan="3">Nivel de acción</th></tr>
<tr><th>Tareas de problematización</th><th>¿Qué hace?</th><th>¿Cómo lo hace?</th></tr>
<tr><td>

Equipo A:

(T1) Al dar las indicaciones de la construcción, V-AP3-S1|1:25:30-1:15:30|: “Una consulta, la otra parte de la recta no sería también perpendicular, al hacer el trazo por abajo”, el IP confirma su pregunta. La APa1 construye la primera recta perpendicular a la recta AB (ver figura 21).

Figura 21. La APa1 construye una recta perpendicular a la recta AB. Fuente: Fotografía-Sesión 1.

Al buscar trazar la segunda recta perpendicular a AB, V-AP3-S1|1:27:43-1:28:00|: “Entonces solo lo movemos así y ya sería otra perpendicular [señala el giro de la esfera manteniendo la regla, ver figura 22]”, esto también lo registra el investigador-profesor (ver figura 23).

Figura 22. El AP3 señala como construir más rectas perpendiculares. Fuente: Video-Sesión 1.

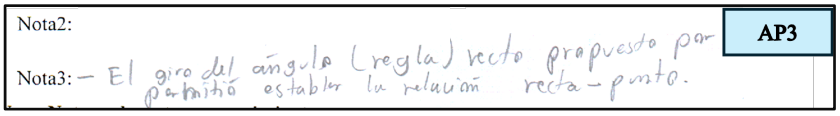


Figura 23. Nota de investigador-profesor sobre la estrategia de girar la regla. Fuente: NIP.

</td><td>

Construyen rectas perpendiculares a AB.
Deducen que las dos interseccionesentre las rectas son perpendiculares.
Reconocen que la primera intersección perpendicular condiciona a la segunda.

Establecen una estrategia para la construcción de la otra perpendicular.

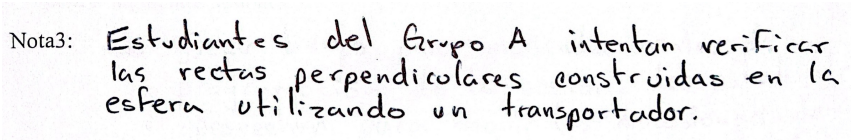
Dinamizan la construcción de perpendiculares.
Trasladan el ángulo recto.
Trasladan la recta perpendicular.

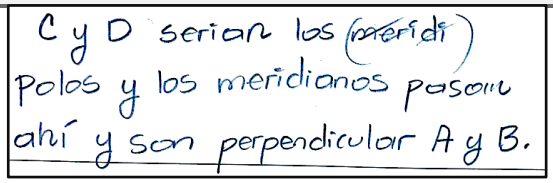
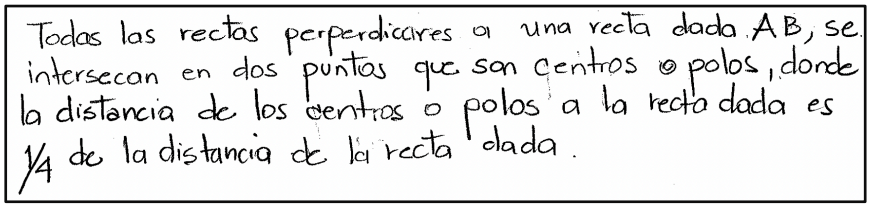
</td><td>

Relacionando la circunferencia máxima completa con la recta AB y haciendo el trazo con la regla esférica.

Girando la esfera y **manteniendo** la regla para trazar otra perpendicular o viceversa.

</td></tr>
</table>

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Después de que CPa1 dice que de esas construcciones deben llegar a una conclusión, el V-AP3-S1|1:36:17-1:36:21|: "Que por un punto pasan infinitas rectas, creo que por ahí va". Mientras los demás equipos trazaban la tercera recta perpendicular a AB, la APa2 estaba verificando la construcción de AB e identificando la distancia que había entre esa recta y los puntos C y D con el compás esférico (ver figura 24). Figura 24. La APa2 identifica la distancia entre C y D con el compás esférico. Fuente: Video-Sesión 1.	**Interpretan** la construcción. **Reconocen** que por los punto C y D pasan infinitas rectas. **Verifican** la construcción de la recta AB, desde su definición de circunferencia. **Reconocen** las 90 partes de círculo o el cuarto de circunferencia máxima como el radio de las circunferencias máxima.	Parecen estar acostumbrados que después de una construcción deben hacer el análisis de ella, describiendo posibles conclusiones. Colocando el cuarto de circunferencia máxima (con el compás) que debe tener el radio en diferentes posiciones.
Durante el tiempo de merienda, las profesoras APa1 y APa2 verificaron la perpendicularidad de las rectas construidas usando un transportador plano (ver figura 25). Esto también lo describe el investigador-observador (ver figura 26). Figura 25. Verificación de perpendicularidad por APa1 y APa2. Fuente: Video-Sesión 1.  Figura 26. Nota de investigador-observador sobre la verificación de la perpendicularidad en la esfera. Fuente: NIO.	**Verifican** la perpendicularidad entre rectas. **Proyectan** las rectas esféricas en el trasportador plano. **Utilizan** instrumentos de medición planos en la esfera.	**Utilizando** un transportador plano, lo sobreponen en la intersección de rectas esférica.
Ante la analogía que presenta el BP1, de esas construcciones con el globo terráqueo, la APa1, en sus hojas de trabajo, la retoma para justificar que toda recta que sea perpendicular pasará por los puntos C y D (ver figura 27).	**Relacionan** las rectas perpendiculares a AB con los meridianos en el globo terráqueo.	**Asociando** sus construcciones con nociones geográficas, los meridianos que se intersecan

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 27. Respuesta T1 por APa1. Fuente: HT. (T3) Ante la primera pregunta, el V-AP3-S1|1:48:27-1:48:30|: "1/2 [al preguntar si será la mitad de la recta completa], perdón, 1/4". Reconoce que desde C a AB y desde D a AB es ¼ de circunferencia, y en todas las rectas es la misma distancia. Al preguntar por qué, el V-AP3-S1|1:49:15-1:48:30|: "Porque esa [refiere a la recta AB] divide a la mitad esa circunferencia, ese hemisferio [se refiere a que divide a la esfera en dos hemisferios]". (T4) En la discusión con todo el grupo, el V-AP3-S1|1:57:50-1:57:56|: "Bueno, lo que yo puse fue: una recta AB en una superficie esférica tiene infinitas rectas perpendiculares que se intersecan en los polos de la misma".	**Justifican** que todas las rectas perpendiculares a AB se intersecan en C y D. **Exploran** su construcción. **Reconocen** que la distancia entre AB y el punto C o el punto D es ¼ de circunferencia máxima. **Identifican** que en todas las rectas perpendiculares a AB se mantiene la misma distancia. **Verifican** la relación con varias rectas y la **establecen** como propiedad.	perpendicularmente con el ecuador y que se intersecan en los polos. **Midiendo** con el compás esférico, **notan** que en todas las rectas la distancia es la misma. Al **relacionar** esa distancia con la circunferencia máxima, se dan cuenta que mide ¼ de esa circunferencia máxima. Además, **girando** la regla esférica o la esfera **construyen** infinitas rectas perpendiculares a AB, con las que lograr **establecer** la propiedad.
Equipo B: (T1) Ante la pregunta ¿si construyo otra línea recta perpendicular a la recta AB también pasará por los puntos C y D?, ¿por qué?, el V-BP1-S1|1:34:51-0:19:27|: "Yo creo que por la analogía del planeta, donde estos dos serían como los polos [señala los puntos C y D], esta sería el ecuador [señala la recta AB], y estas serían los meridianos". El IP pregunta si todos los meridianos se tocan en los polos, y todos mencionan que sí. (T4) En sus HT, el BP1 menciona que todas las rectas perpendiculares a la recta inicial se intersecan en sus polos y que la distancia de esos polos a la recta es ¼ de la recta dada (ver figura 28). El equipo completo comparte estas ideas.  Figura 28. Respuesta T4 por BP. Fuente: HT.	**Relacionan** su construcción con nociones de geografía. **Exponen** que los meridianos son perpendiculares al ecuador y se unen en los polos, por ello, todas las rectas perpendiculares a AB se intersecan en C y D. **Deducen** que la medida entre AB y el punto C o D es de ¼ de circunferencias máxima.	**Estableciendo** una analogía con nociones geográficas, lograron **transferir** propiedades de esas nociones geográficas a sus construcciones geométricas y **reconocer** esa misma propiedad.
Equipo C: (T1) Después de la explicación de BP1, sobre la analogía de las ideas geométricas con el planeta Tierra, V-CPa1-S1|1:35:50-1:36:03|: "Yo no sé por qué, pero tenemos que deducir algo… tenemos que llegar a una conclusión". (T2) En la discusión con todo el grupo, V-CPa3-S1|1:44:02-1:44:52|: "Sí, porque las rectas que trazamos perpendiculares a la recta AB van pasando por esos puntos, ya vimos 3 casos que sí se cumplió".	**Interpretan** la construcción. **Construyen** tres rectas perpendiculares a AB. **Observan** que las tres rectas se	Después de hacer la construcción, **exponiendo** que deben analizar la construcción para reconocer una conclusión. **Trazando** tres rectas logran

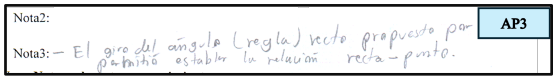
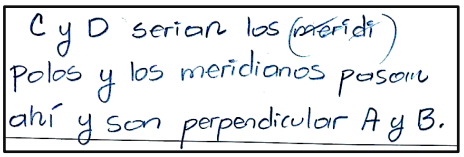
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
(T4) En la discusión con todo el grupo, V-CPa1-S1|1:57:16-1:57:31|: "Trazada una línea recta AB en la esfera, toda recta perpendicular a la recta AB se interseca en dos puntos, que serían C y D, y la medida es ¼ de la recta AB".	intersecan en C y D. **Generalizan** la relación para toda recta perpendicular a AB. **Establecen** la relación como propiedad.	generalizar la relación.

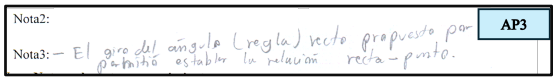
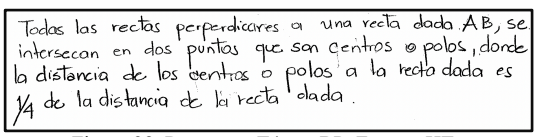
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
Construyen rectas perpendiculares a la recta AB, interpretan la construcción, reconocen que una intersección entre dos rectas condiciona a la segunda intersección; establecen estrategias para construir infinitas rectas perpendiculares (girando la esfera y fijando la regla o viceversa, relacionando la construcción con la geografía y construyendo varios casos); trasladan el ángulo recto; trasladan la recta perpendicular; verifican la perpendicularidad entre rectas; reconocen que todas las rectas se intersecan en los polos, que los polos (C y D) son los centros de la circunferencia AB y que la distancia entre los polos y la circunferencia AB es ¼ de circunferencia máxima; para **generalizar la relación de que todas las rectas perpendiculares a una recta dada se intersecan en los polos de la recta dada.** Construyen rectas perpendiculares a la recta AB, interpretan la construcción, reconocen que una insercepción entre dos rectas condiciona a la segunda intersección; verifican la perpendicularidad entre rectas, utilizan instrumentos de medición planos en la esfera; asocian las rectas perpendiculares a AB con los meridianos del globo terráqueo; para **relacionar rectas esféricas perpendiculares.** Verifican la construcción de la recta AB, desde su definición de circunferencia, reconocen las 90 partes de círculo o el cuarto de circunferencia máxima como el radio de las circunferencias máxima; para **reconocer propiedades de la recta esférica (es una circunferencia por lo que también puede construirse por la definición de circunferencia).**

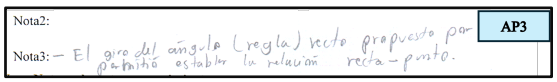
2-2 Análisis de usos: parte II

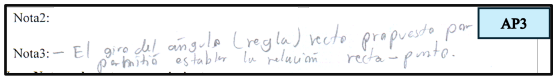
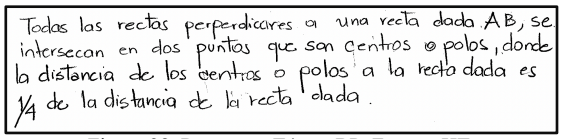
En el papel que desempeña la noción matemática en la tarea se hará una distinción entre el plano [p] y la esfera [E]. En la tabla anterior (análisis de acciones y actividades), se marcarán las acciones y actividades donde estén involucradas las nociones matemáticas de interés.

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Recta y segmento de recta plano y esférico		
En las acciones	**Construyen** rectas perpendiculares a la recta AB e **interpretan** la construcción.	La APa1 construye la primera recta perpendicular a la recta AB (ver figura 21). Figura 21. La APa1 construye una recta perpendicular a la recta AB. Fuente: Fotografía-Sesión 1.	Trazan una segunda recta que sea perpendicular a la recta AB, usando la regla y el transportador esférico. Toman la recta a AB como un lado del ángulo recto, para construir la otra recta perpendicular.	**Recta como referencia** para trazar otra recta [E]. **Relación entre rectas**-perpendicularidad [E]. Recta **como circunferencia máxima** [E].
		Después de que CPa1 dice que de esas construcciones deben llegar a una conclusión, el V-AP3-S1|1:36:17-1:36:21|: "Que por un punto pasan infinitas rectas, creo que por ahí va". (T1) Después de la explicación de BP1, sobre la analogía de las ideas geométricas con el planeta Tierra, V-CPa1-S1|1:35:50-1:36:03|: "Yo no sé por qué, pero tenemos que deducir algo… tenemos que llegar a una conclusión".	Interpretando la construcción deducen que por los polos de AB pueden pasar infinitas rectas perpendiculares a AB.	**Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E].
		(T2) En la discusión con todo el grupo, V-CPa3-S1|1:44:02-1:44:52|: "Sí, porque las rectas que trazamos perpendiculares a la recta AB van pasando por esos puntos, ya vimos 3 casos que sí se cumplió".	Trazan tres rectas perpendiculares a AB y verifican que pasan por sus polos.	**Recta como casos** en la generalización de propiedades [E].
	Reconocen que una intersección entre dos rectas condiciona a la segunda intersección.	(T1) Al dar las indicaciones de la construcción, V-AP3-S1|1:25:30-1:15:30|: "Una consulta, la otra parte de la recta no sería también perpendicular, al hacer el trazo por abajo".	Construyen una recta perpendicualar a AB y notan que ambas interseccionesse dan en 90 grados.	**Dos rectas siempre se intersecan en dos puntos** [E]. **Las interseccionesentre dos rectas son congruentes** (los cuatro ángulos de una intersección son congruentes respectivamen con los cuatro ángulo de la otra intersección) [E].
	Establecen estrategias para construir	Al buscar trazar la segunda recta perpendicular a AB, V-AP3-S1|1:27:43-1:28:00|: "Entonces solo lo movemos así y ya sería otra perpendicular [señala el giro de la esfera manteniendo la regla, ver figura	Mantienen la regla fija y firan la esfera o viceversa para mostrar la construcción de	**Recta dinámica** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	infinitas rectas perpendiculares (girando la esfera y fijando la regla o viceversa, relacionando la construcción con la geografía y construyendo varios casos).	22]", esto también lo registra el investigador-profesor (ver figura 23). Figura 22. El AP3 señala como construir más rectas perpendiculares. Fuente: Video-Sesión 1.  Figura 23. Nota de investigador-profesor sobre la estrategia de girar la regla. Fuente: NIP.	infinitas rectas perpendiculares a AB.	**Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E]. **Recta como eje de giro** [P].
		Ante la analogía que presenta el BP1, de esas construcciones con el globo terráqueo, la APa1, en sus hojas de trabajo, la retoma para justificar que toda recta que sea perpendicular pasará por los puntos C y D (ver figura 27).  Figura 27. Respuesta T1 por APa1. Fuente: HT.	Retoman la analogía con la geografía, reconocen que como los meridianos son perpendiculares al ecuador y se intersecan en los polos, entonces, todas las rectas perpendiculares a AB se intersectarán en C y D.	**Recta geográfica** [E]. **Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E].
		El V-BP1-S1|1:34:51-0:19:27|: "Yo creo que por la analogía del planeta, donde estos dos serían como los polos [señala los puntos C y D], esta sería el ecuador [señala la recta AB], y estas serían los meridianos". El IP pregunta si todos los meridianos se tocan en los polos, y todos mencionan que sí.	Establecen una analogía con la geografía, reconocen que como los meridianos son perpendiculares al ecuador y se intersecan en los polos, entonces, todas las rectas perpendiculares a AB se intersectarán en C y D.	
		(T2) En la discusión con todo el grupo, V-CPa3-S1|1:44:02-1:44:52|: "Sí, porque las rectas que trazamos perpendiculares a la recta AB van pasando por esos puntos, ya vimos 3 casos que sí se cumplió".	Trazan tres rectas para generalizar la relación.	**Recta como casos** en la generalización de propiedades [E].
	Trasladan la recta perpendicular.	Al buscar trazar la segunda recta perpendicular a AB, V-AP3-S1|1:27:43-1:28:00|: "Entonces solo lo movemos así y ya sería otra perpendicular [señala el giro de la esfera manteniendo la regla, ver figura 22]", esto también lo registra el investigador-profesor (ver figura 23). 	Mantienen la regla fija y firan la esfera o viceversa para mostrar la construcción de infinitas rectas perpendiculares a AB.	**Recta dinámica** [E]. **Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E]. **Recta como eje de giro** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Verifican la perpendicularidad entre rectas, **utilizando** instrumentos de medición planos en la esfera	Figura 22. El AP3 señala como construir más rectas perpendiculares. Fuente: Video-Sesión 1.  Figura 23. Nota de investigador-profesor sobre la estrategia de girar la regla. Fuente: NIP. Durante el tiempo de merienda, las profesoras APa1 y APa2 verificaron la perpendicularidad de las rectas construidas usando un transportador plano (ver figura 25). Esto también lo describe el investigador-observador (ver figura 26). Figura 25. Verificación de perpendicularidad por APa1 y APa2. Fuente: Video-Sesión 1.	Sobreponiendo un transportador plano, verifican la perpendicularidad de las rectas.	**Recta como referencia** para trazar otra recta [E]. **Relación entre rectas**-perpendicularidad [E]. **Rectas como elementos que componen** un ángulo [E].
	Reconocen que todas las rectas se intersecan en los polos, que los polos (C y D) son los centros de la circunferencia AB y que la distancia entre los polos y la circunferencia AB es ¼ de circunferencia máxima.	(T3) Ante la primera pregunta, el V-AP3-S1|1:48:27-1:48:30|: "1/2 [al preguntar si será la mitad de la recta completa], perdón, 1/4". Reconoce que desde C a AB y desde D a AB es ¼ de circunferencia, y en todas las rectas es la misma distancia. Al preguntar por qué, el V-AP3-S1|1:49:15-1:48:30|: "Porque esa [refiere a la recta AB] divide a la mitad esa circunferencia, ese hemisferio [se refiere a que divide a la esfera en dos hemisferios]". (T4) En la discusión con todo el grupo, el V-AP3-S1|1:57:50-1:57:56|: "Bueno, lo que yo puse fue: una recta AB en una superficie esférica tiene infinitas rectas perpendiculares que se intersecan en los polos de la misma".	Deducen que la distancia entre la recta AB y sus polos es de ¼, además que esa distancia se mantienen en todas las rectas perpendiculares a AB o que esa distancia es el radio de la circunferencia AB. Esa deducción la justifican indicando que la recta AB divide a la esfera en dos hemisferios.	Recta **como circunferencia máxima** [E]. **Recta compuesta** por dos puntos y una distancia [E]. Recta **como eje de simetría** [E]. **Recta como divisor de la superficie** [E].
		(T4) En sus HT, el BP1 menciona que todas las rectas perpendiculares a la recta inicial se intersecan en sus polos y que la distancia de esos polos a la recta es ¼ de la recta dada (ver figura 28). El equipo completo comparte estas ideas.  Figura 28. Respuesta T4 por BP. Fuente: HT.	Establecen como una propiedad que todas las rectas perpendiculares a AB se intersecan en C y D. Reconocen que todas las rectas perpendiculares se intersecan.	**Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E]. **Relación entre rectas**-perpendicularidad [E].
		(T4) En la discusión con todo el grupo, V-CPa1-S1|1:57:16-1:57:31|: "Trazada una línea recta AB en la esfera, toda recta perpendicular a la recta AB se	Trazan la recta AB, luego reconocen que todas las rectas perpendiculares a AB se intersecan en dos puntos y que la distancia entre la recta	**Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E]. **Relación entre rectas**-perpendicularidad [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Verifican la construcción de la recta AB, desde su definición de circunferencia. **Reconocen** las 90 partes de círculo o el cuarto de circunferencia máxima como el radio de las circunferencias máxima.	interseca en dos puntos, que serían C y D, y la medida es ¼ de la recta AB". Mientras los demás equipos trazaban la tercera recta perpendicular a AB, la APa2 estaba verificando la construcción de AB e identificando la distancia que había entre esa recta y los puntos C y D con el compás esférico (ver figura 24). Figura 24. La APa2 identifica la distancia entre C y D con el compás esférico. Fuente: Video-Sesión 1.	AB y las interseccioneses de ¼ de cirucnferencia máxima. Usando el compás esférico, verifican que la medida desde el polo se mantenga en diferentes puntos de la recta AB, deduciendo que esa medida son 90 partes de círculo o ¼ de circunferencia máxima.	Recta **como circunferencia máxima** [E]. **Recta compuesta** por dos puntos y una distancia [E]. Recta **como la relación entre dos puntos y una distancia** [E].
		Ángulo plano y esférico		
	Trasladan el ángulo recto.	Al buscar trazar la segunda recta perpendicular a AB, V-AP3-S1|1:27:43-1:28:00|: "Entonces solo lo movemos así y ya sería otra perpendicular [señala el giro de la esfera manteniendo la regla, ver figura 22]", esto también lo registra el investigador-profesor (ver figura 23). Figura 22. El AP3 señala como construir más rectas perpendiculares. Fuente: Video-Sesión 1.  Figura 23. Nota de investigador-profesor sobre la estrategia de girar la regla. Fuente: NIP.	Mantienen la regla fija y firan la esfera o viceversa para mostrar la construcción de infinitas rectas perpendiculares a AB.	El **ángulo como argumento** en la relación de rectas perpendiculares [E]. El **ángulo como la relación** de dos rectas [E]. El **ángulo como cantidad estática** [E]. Angulo **como una cualidad** (por su forma) y una **relación dinámica** [E].
		Recta y segmento de recta plano y esférico		
En las actividades	**Generalizar la relación** de que todas las rectas perpendiculares a una recta dada se intersecan en los polos de la recta dada.	Al buscar trazar la segunda recta perpendicular a AB, V-AP3-S1|1:27:43-1:28:00|: "Entonces solo lo movemos así y ya sería otra perpendicular [señala el giro de la esfera manteniendo la regla, ver figura 22]", esto también lo registra el investigador-profesor (ver figura 23).	Construyen rectas perpendiculares a la recta AB, interpretan la construcción, reconocen que una intersección entre dos rectas condiciona a la segunda intersección; establecen estrategias para construir infinitas rectas perpendiculares (girando la esfera y fijando la regla o	**Relación entre rectas**-perpendicularidad [E]. **Dos rectas siempre se intersecan en dos puntos** [E]. **Las interseccionesentre dos rectas son congruentes** (los cuatro ángulos de una intersección son congruentes

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		 Figura 22. El AP3 señala como construir más rectas perpendiculares. Fuente: Video-Sesión 1.  Figura 23. Nota de investigador-profesor sobre la estrategia de girar la regla. Fuente: NIP. (T3) Ante la primera pregunta, el V-AP3-S1|1:48:27-1:48:30|: "1/2 [al preguntar si será la mitad de la recta completa], perdón, 1/4". Reconoce que desde C a AB y desde D a AB es ¼ de circunferencia, y en todas las rectas es la misma distancia. Al preguntar por qué, el V-AP3-S1|1:49:15-1:48:30|: "Porque esa [refiere a la recta AB] divide a la mitad esa circunferencia, ese hemisferio [se refiere a que divide a la esfera en dos hemisferios]". (T4) En la discusión con todo el grupo, el V-AP3-S1|1:57:50-1:57:56|: "Bueno, lo que yo puse fue: una recta AB en una superficie esférica tiene infinitas rectas perpendiculares que se intersecan en los polos de la misma". V-BP1-S1|1:34:51-0:19:27|: "Yo creo que por la analogía del planeta, donde estos dos serían como los polos [señala los puntos C y D], esta sería el ecuador [señala la recta AB], y estas serían los me**ridi**anos". El IP pregunta si todos los meridianos se tocan en los polos, y todos mencionan que sí. (T4) En sus HT, el BP1 menciona que todas las rectas perpendiculares a la recta inicial se intersecan en sus polos y que la distancia de esos polos a la recta es ¼ de la recta dada (ver figura 28). El equipo completo comparte estas ideas.  Figura 28. Respuesta T4 por BP. Fuente: HT. (T2) En la discusión con todo el grupo, V-CPa3-S1|1:44:02-1:44:52|: "Sí, porque las rectas que trazamos perpendiculares a la recta AB van pasando por esos puntos, ya vimos 3 casos que sí se cumplió". (T4) En la discusión con todo el grupo, V-CPa1-S1|1:57:16-1:57:31|: "Trazada una línea recta AB en la esfera, toda recta perpendicular a la recta AB se	viceversa, relacionando la construcción con la geografía y construyendo varios casos); trasladan el ángulo recto; trasladan la recta perpendicular; verifican la perpendicularidad entre rectas; reconocen que todas las rectas se intersecan en los polos, que los polos (C y D) son los centros de la circunferencia AB y que la distancia entre los polos y la circunferencia AB es ¼ de circunferencia máxima.	respectivamen con los cuatro ángulo de la otra intersección) [E]. **Recta dinámica** [E]. **Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E]. **Recta como eje de giro** [P]. **Recta como casos** en la generalización de propiedades [E]. **Rectas como elementos que componen** un ángulo [E]. Recta **como circunferencia máxima** [E]. Recta **como eje de simetría** [E]. **Recta como divisor de la superficie** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Relacionar rectas esféricas perpendiculares.	interseca en dos puntos, que serían C y D, y la medida es ¼ de la recta AB". V-AP3-S1|1:25:30-1:15:30|: "Una consulta, la otra parte de la recta no sería también perpendicular, al hacer el trazo por abajo", el IP confirma su pregunta. La APa1 construye la primera recta perpendicular a la recta AB (ver figura 21). Figura 21. La APa1 construye una recta perpendicular a la recta AB. Fuente: Fotografía-Sesión 1. Durante el tiempo de merienda, las profesoras APa1 y APa2 verificaron la perpendicularidad de las rectas construidas usando un transportador plano (ver figura 25). Esto también lo describe el investigador-observador (ver figura 26). Figura 25. Verificación de perpendicularidad por APa1 y APa2. Fuente: Video-Sesión.1.	Construyen rectas perpendiculares a la recta AB, interpretan la construcción, reconocen que una insercepción entre dos rectas condiciona a la segunda intersección; verifican la perpendicularidad entre rectas, utilizan instrumentos de medición planos en la esfera; asocian las rectas perpendiculares a AB con los meridianos del globo terráqueo.	**Relación entre rectas**-perpendicularidad [E]. **Dos rectas siempre se intersecan en dos puntos** [E]. **Las interseccionesentre dos rectas son congruentes** (los cuatro ángulos de una intersección son congruentes respectivamen con los cuatro ángulo de la otra intersección) [E].
	Reconocer propiedades de la recta esférica (es una circunferencia por lo que también puede construirse por la definición de	Mientras los demás equipos trazaban la tercera recta perpendicular a AB, la APa2 estaba verificando la construcción de AB e identificando la distancia que había entre esa recta y los puntos C y D con el compás esférico (ver figura 24).	Verifican la construcción de la recta AB, desde su definición de circunferencia, reconocen las 90 partes de círculo o el cuarto de circunferencia máxima como el radio de las circunferencias máxima;	Recta como una **circunferencia máxima** [E]. Recta como una **relación entre dos puntos y una distancia** [E]. **Recta compuesta** por dos puntos y una distancia [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	circunferencia).	Figura 24. La APa2 identifica la distancia entre C y D con el compás esférico. Fuente: Video-Sesión 1.		
	Ángulo plano y esférico			

3. Parte III. Relación recta-recta (12 tareas)

1. Construya dos rectas en una hoja de papel. ¿Se relacionan de alguna manera?, ¿cómo pueden estar relacionadas estas dos rectas?

2. ¿Se mantendrán estas relaciones en la esfera? Construya dos circunferencias máximas (líneas rectas esféricas) en la esfera de Lénárt y verifique si se mantienen estas relaciones.

   Nombren los puntos de intersección punto A y B. Presentación de un globo terráqueo, marca en el globo el polo norte como el punto A y el polo sur como el punto B de nuestra construcción.

3. En la geografía del globo terráqueo ¿qué papel representan los segmentos que van desde el polo norte al polo sur?

4. ¿Todos los meridianos son representaciones de líneas rectas en el globo terráqueo?

5. En la geografía del globo terráqueo, ¿qué papel representan los círculos que tienen como centro al polo norte o el polo sur?

6. ¿Todos los paralelos son representaciones de líneas rectas en el globo terráqueo?

   Seleccionen dos meridianos y márquelos en el globo con una línea punteada.

7. Observen y describan el comportamiento de los arcos de círculo de los paralelos, entre los dos meridianos seleccionados, a medida que se alejan del polo norte (punto A). ¿Qué está ocurriendo con los dos meridianos marcados?

8. Observan y describen el comportamiento de los arcos de círculo de los paralelos, entre los dos meridianos seleccionado, a medida que se acercan al polo sur. ¿Qué está ocurriendo con los dos meridianos marcados?

9. ¿Qué sucede con los meridianos en el Ecuador?

10. ¿Qué sucede con los dos meridianos o rectas esféricas entre el polo norte y sur (o punto A y B)?

11. En comparación con una circunferencia máxima completa, ¿a qué distancia cambia el comportamiento de los meridianos o rectas?

12. En comparación con una circunferencia máxima completa, ¿a qué distancia se intersecan ambas rectas?

Hipótesis didáctica:

En el plano, (T1) trazarán rectas que se intersecan (rectas secantes) y rectas que no se intersecan (paralelas). De las secantes identificarán las perpendiculares y las oblicuas (estas últimas descritas como rectas que se intersecan y no son perpendiculares). Al preguntarles si se relacionan de alguna forma, mencionarán esas categorías de relación. Las rectas paralelas están relacionadas por la distancia invariante entre ellas y las otras, porque se intersecan en un punto. Además, (T2) mencionarán que ambas relaciones se mantienen en la esfera (paralelas y no paralelas) y con la construcción se darán cuenta de la inexistencia del paralelismo en la esfera y que dos rectas siempre se intersecan en dos puntos (verificarán la construcción de dos paralelas en la esfera).

A través de la interacción con el globo terráqueo, harán una analogía de las construcciones geométricas que tienen con los paralelos y los meridianos (T3, T4, T5 y T6). Además, reconocerán que todos los meridianos

son segmentos de recta esférica y de los paralelos, solo el ecuador es una recta esférica. (T7, T8, T9 y T10) Concluirán que las rectas o meridianos inician alejándose en el punto A o polo norte y vuelven a coincidir en el punto B o polo sur, además de que en el Ecuador sucede la separación máxima. Reconocerán el cuarto de circunferencia máxima como la distancia en la que cambia el comportamiento (T11) y la semicircunferencia máxima como la distancia en la que vuelven a intersecarse (T12).

Descripción general:

Construyen dos rectas en el plano y reconocen que estas se pueden intersecar o no. Las que no se intersecan se llaman paralelas y de las que se intersecan están las perpendiculares y las no perpendiculares. Luego, discuten esas relaciones en la esfera; inicialmente piensan que debe haber paralelas en la esfera dada la existencia de los paralelos en el globo terráqueo; sin embargo, concluyen la inexistencia del paralelismo en la esfera. Seguidamente, analizan la construcción de dos meridianos en el globo terráqueo; ahí reconocen que dos rectas inician divergiendo una de la otra. En el ecuador hay un cambio, donde empiezan a converger hasta volver a intersecarse. Exponen que ese cambio ocurre a ¼ de circunferencia máxima desde el polo norte y que vuelven a intersecarse a ½ de circunferencia máxima o una semicircunferencia máxima.

Descripción particular:

Equipo A:

Se le pregunta al AP3 por la caracterización de la recta que dio sobre el ángulo, V-AP3-S2|0:00:18-0:01:13|: “Sí, no sé si la recta, al estar así, forma un ángulo recto, la recta con el plano… No sé, lo asocié con el ángulo en ese momento, no sé si tiene algo que ver la definición de línea recta con el ángulo recto”. El IP muestra las dos palmas juntas y le dice que si una es el plano y la otra la recta, qué ángulo habría, V-AP3-S2|0:01:12-0:01:13|: “De 180, que es un múltiplo de 90, podría ser un ángulo de 90 por otro número” [idea asociada a la caracterización de recta de la sesión 1], esto también el investigador-profesor lo registra en sus notas (ver figura 29).

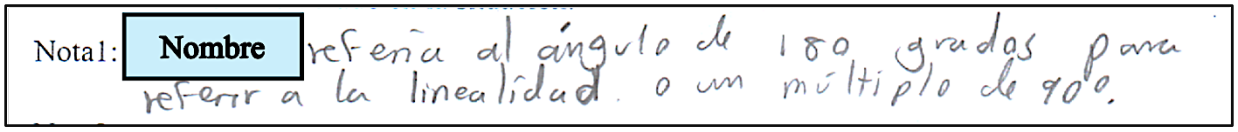


Figura 29. Nota de investigador-profesor sobre la linealidad según AP3. Fuente: NIP.

(T1) En la DG, la V-APa1-S2|0:10:51-0:15:30|: “Bueno, llegamos a la conclusión que mis dos compañeros, que dibujaron rectas oblicuas, qué son oblicuas, que se intersecan y no tienen más forma de relacionarse, y las mías no se intersecan”, según el investigador-observador esta intersección se entiende como la forma de relacionarse (ver figura 30). En este caso, solo la APa1 dibujó rectas paralelas; además, piensa en lo que serían las paralelas en la esfera [esto es algo que no era parte de la actividad en esta tarea] (ver figura 31). Por su

parte, la APa2 fue la única de todo el grupo de participantes que presenta en la construcción la intersección de dos rectas (ver figura 32).

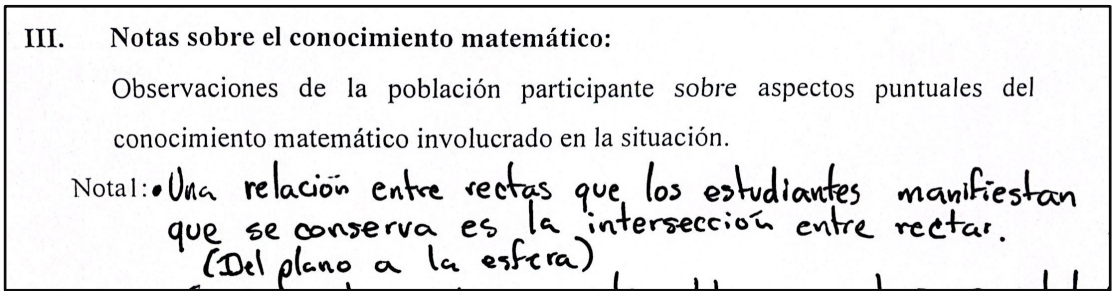


Figura 30. Nota de investigador-observador sobre la intersección de rectas. Fuente: NIO.

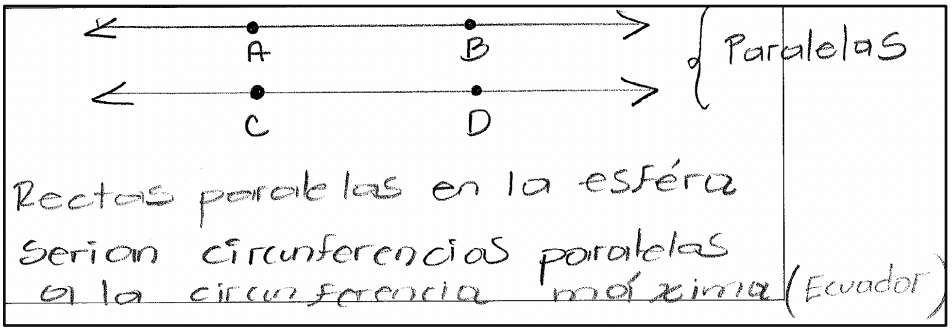


Figura 31. Respuesta T1 por APa1. Fuente: HT.

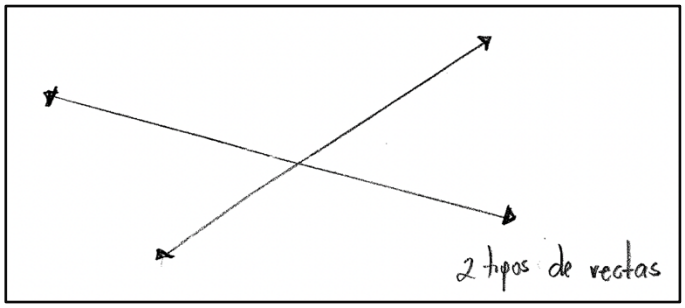


Figura 32. Respuesta T1 por APa2. Fuente: HT.

Al preguntar si tenemos algunas rectas oblicuas especiales, todos responden que las perpendiculares. Sin embargo, el V-AP3-S2|0:14:18-0:01:13|: “Tengo una consulta con lo de las rectas, y cuando son alabeadas [rectas que están en planos distintos]”. El IP hace la aclaración de que estamos trabajando en el mismo plano.

(T2) Al preguntar si se darán esas relaciones en la esfera, V-APa1-S2|0:13:17-0:13:20|: “Podemos tener circunferencias paralelas”, señala circunferencias paralelas al ecuador (ver figura 33). El V-AP3-S2|0:13:38-0:13:45|: “Según lo que sé de geografía, sí, porque están los meridianos y los paralelos, o sea que si son paralelos son paralelas”. Estos cuestiomientos también son señalados por el investigador-observador (ver figura 34).

Figura 33. APa1 señala circunferencias paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.

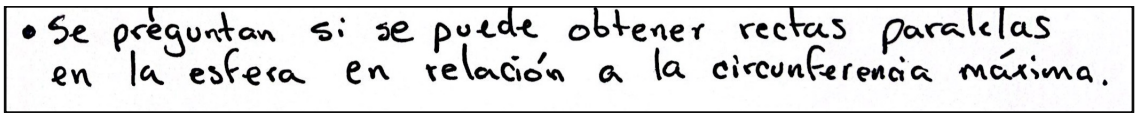


Figura 34. Nota de investigador-observador sobre rectas paralelas en la esfera. Fuente: NIO.

Para verificar la existencia de paralelas en la esfera, la APa1 solicita hilo e intenta tensar el hilo en una circunferencia menor, paralela al ecuador (ver figura 35), y menciona V-APa1-S2|0:17:38-0:17:38|: "Se va [es decir, el hilo se desliza]". Mueve la circunferencia hasta llegar al ecuador, logra tensar el hilo, dice V-APa1-S2|0:17:53-0:18:20|: "Esta es la máxima, parece que no, no queda el hilo tenso". Además, agrega V-APa1-S2|0:19:24-0:17:38|: "Que la tensión de la cuerda depende de qué tan alejado o cercano esté del ecuador".

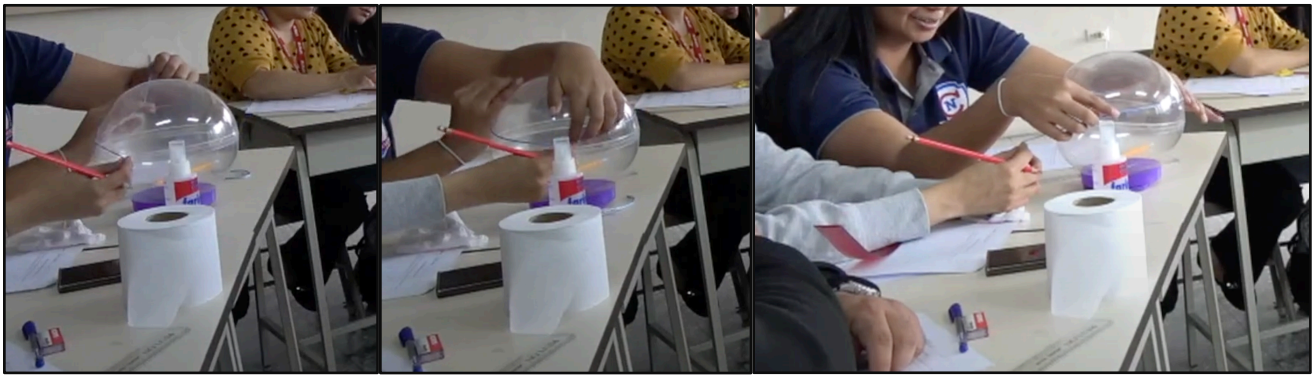


Figura 35. APa1 intentar construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.

Las profesoras APa1 y APa2 toman la regla esférica e intentan colocarla paralela al ecuador (ver figura 36). En la DG, al preguntar si podemos tener rectas perpendiculares, el V-AP3-S2|0:21:07-0:21:07|: "Sí".

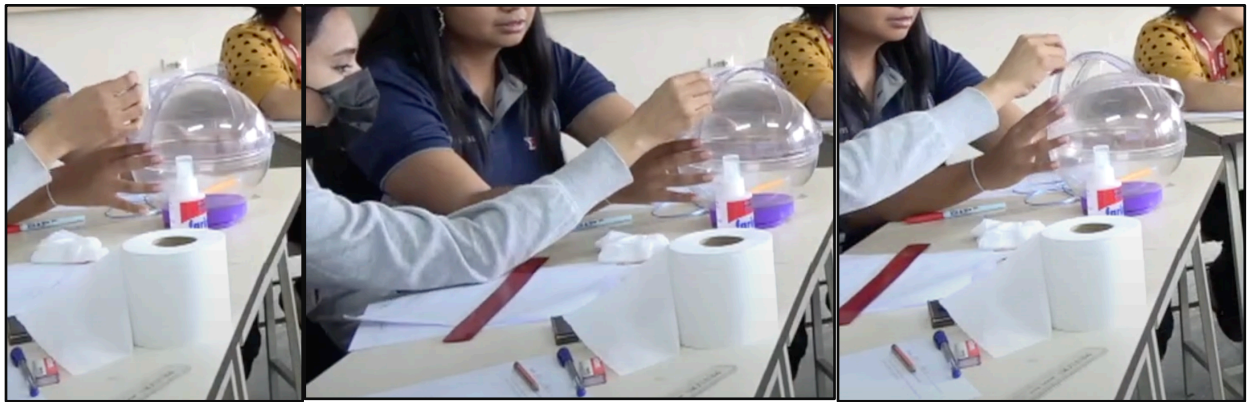


Figura 36. APa1 y APa2 intentan construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.

El V-AP3-S2|0:22:45-0:21:07|: “El paralelismo en la esfera se podría dar de diferentes maneras; yo lo que pensábamos era como, en función a la circunferencia máxima”. El IP hace una explicación de por qué los meridianos son rectas y los paralelos no, excepto el ecuador. La profesora APa1 marca los meridianos en el globo terráqueo (ver figura 37).

Figura 37. APa1 marca meridianos en el globo terráqueo. Fuente: Fotografía-sesión 2.

Todos los equipos reconocen que todos los meridianos y antimeridianos son líneas rectas en el globo terráqueo (T3, T4), además de que de los paralelos solo el ecuador es línea recta esférica (T5, T6).

(T7) La V-APa1-S2|0:33:09-0:17:38|: “Vamos viendo que se va haciendo máximo; pareciera que en el ecuador que no está señalizado [lo señala con su mano, ver figura 38a], luego va disminuyendo de polo a polo. En el polo inicial va aumentando y después, al llegar al otro polo, va disminuyendo [marca el aumento y disminución con sus manos, ver figura 38b]”. (T8) Cuando se presenta esta pregunta, V-APa1-S2|0:38:48-0:39:01|: “Se van acercando”. Ante la pregunta de qué suceso ocurre entre los meridianos (T10), la V-APa1-S2|0:42:20-0:42:59|: “Guardan la distancia del polo norte al polo sur, la distancia del polo norte al ecuador es ¼, y luego cambia a esa distancia… El polo norte y el polo sur, ambos, son puntos de intersección”. El IP menciona: “Sí, son puntos de intersección, son opuestos, entre ellos hay un cambio, pero ¿qué cambia?”; V-APa1-S2|0:43:25-0:42:59|: “Cuando llegamos a la circunferencia máxima, luego va a haber una disminución”. El IP menciona, entonces, esta cambiando la amplitud de los arcos, de crecimientos a decrecimientos.

Figura 38a. APa1 señala el ecuador. Fuente: Fotografía-sesión 2.

Figura 38b. APa1 marca el aumento y disminución de los arcos de círculo. Fuente: Fotografía-sesión 2.

Por su parte, la APa2 en sus hojas de trabajo reconoce el cambio asociado a la distancia entre meridianos; además, reconoce que el cambio se da en el ecuador (ver figura 39). El AP3 señala el comportamiento de esas rectas con los verbos separar y juntar (ver figura 40).

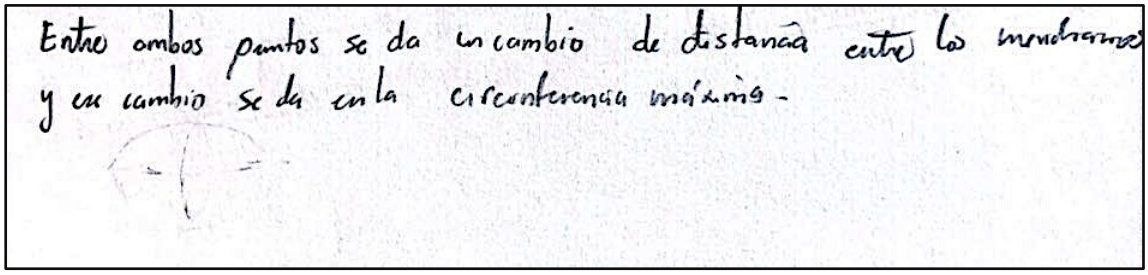


Figura 39. Respuesta a la T10 por APa2. Fuente: HT.

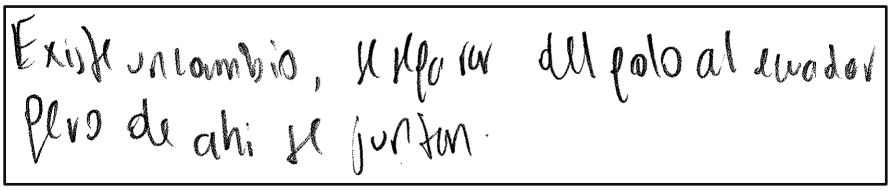


Figura 40. Respuestas a la T10 por AP3. Fuente: HT.

Toda la población participante está de acuerdo en que el cambio de comportamiento entre los dos meridianos será a ¼ de circunferencia máxima (T11) y que vuelven a intersecarse a ½ de circunferencia máxima o una semicircunferencia (T12).

Equipo B:

En repaso de las ideas más importantes de la sesión anterior, se les preguntó qué cosas se tienen en el plano como consecuencia del paralelismo y se perderían en la esfera; ante ello, el V-BP1-S2|0:06:25-0:06:30|: "Todo lo que se deriva del paralelismo, como los rectángulos, cuadrados, paralelogramos".

(T1) Después de la construcción de las dos rectas, discuten en los equipos. El V-BP1-S2|0:09:02-0:09:08|: "Bueno [menciona el nombre de la BPa2], hizo paralelas, pero yo no; se parece a la suya, pero igual está más

inclinada". La construcción de la BPa2 se presenta en la figura 41 y la construcción del BP1 en la figura 42, la V-BPa3-S2|0:09:17-0:09:20|: "Creo que cuando usted siga [refiere a que si continúa la recta], van a intersecarse en un punto, mientras que las de [menciona el nombre de la BPa2] no", el V-BP1-S2|0:09:24-0:09:26|: "Depende, parecen paralelas", la V-BPa2-S2|0:09:27-0:09:36|: "Parecen paralelas, pero no sabemos, hay que medir si en todos los puntos son equidistantes", la V-BPa3-S2|0:09:37-0:09:20|: "Es como una hipótesis".

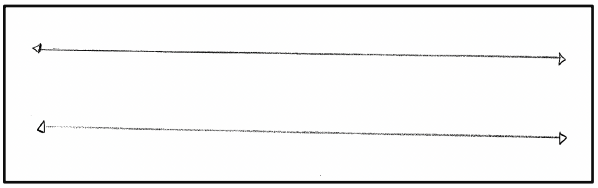


Figura 41. Construcción de las dos rectas por BPa2. Fuente: HT.

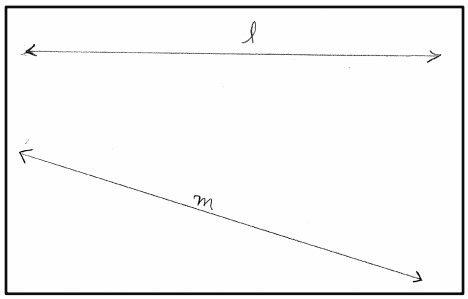


Figura 42. Construcción de las dos rectas por BP. Fuente: HT.

En sus hojas de trabajo, la BPa3 menciona que se relacionan por la no intersección o por la intersección en un punto [generalización euclidiana] (ver figura 43).

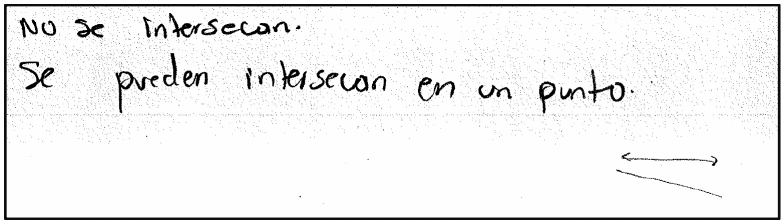


Figura 43. Respuesta a la T1 por BPa3. Fuente: HT.

(T2) En la DG, al preguntar si podemos tener rectas perpendiculares, el equipo menciona que ellos dibujaron dos rectas perpendiculares (ver figura 44).

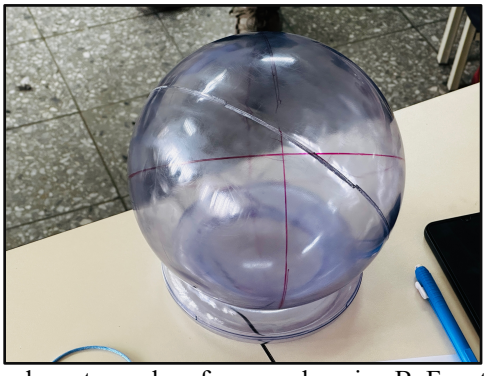


Figura 44. Construcción de rectas en la esfera por el equipo B. Fuente: Fotografía-sesión 2.

Inicialmente, marcaron un meridiano con su antimeridiano (ver figura 45). Por el uso que se daría a la construcción, se les pidió que fuera semejante a la construcción en la esfera de Lénárt, por lo que la cambiaron.

Figura 45. El BP1 marca un meridiano con su antimeridiano en el globo terráqueo. Fuente: Fotografía-sesión 2.

(T5) Cuando se pregunta por los círculos que tienen como centro el polo norte y el polo sur, el V-BP1-S2|0:27:21-0:27:32|: Se ubica en uno de los polos y señala diferentes círculos esféricos (ver figura 46), luego menciona V-BP1-S2|0:27:32-0:27:34|: “Son los paralelos”.

Figura 46. El BP1 señala diferentes paralelos. Fuente: Video-sesión 2.

(T7) En la DE, el V-BP1-S2|0:34:00-0:27:34|: “Tendremos que dibujar uno [refiere a dibujar un arco de círculo], ah, pero cómo lo dibujamos, uno cerca”, se pone de acuerdo en dibujar un círculo cercano al polo. V-BPa3-S2|0:34:10-0:34:19|: “Pero el detalle está en que, si se fijan, cuando ya va más acá, se acercan”. Entonces el V-BP1-S2|0:34:20-0:34:23|: “Sí, a medida se va acercando al polo, el arco es más pequeño [hace el proceso inverso al sugerido en la instrucción]”. La V-BPa3-S2|0:34:50-0:34:19|: “Qué extraño verdad, algo sucede”. (T9) Ante esta pregunta, el V-BP1-S2|0:39:30-0:39:31|: “Se tiene la separación más grande”.

(T10) El V-BP1-S2|0:44:15-0:44:20|: “Es que no entiendo la pregunta”. V-BPa3-S2|0:44:20-0:44:23|: “No sé, que la distancia cambia”, el V-BP1-S2|0:45:04-0:45:10|: “No sé, no encuentro la palabra, o sea, lo que sucede es esto [señalando el cambio de longitud de los arcos]”, V-BPa3-S2|0:45:38-0:44:23|: “Cambia el comportamiento de las rectas”. En sus HT, el BP1 reconoce el cambio usando los términos alejarse y acercarse (ver figura 47).

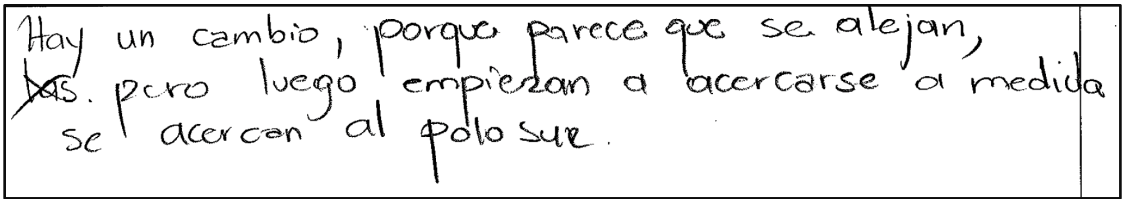


Figura 47. Respuesta a la T10 por BP1. Fuente: HT.

(T11) El V-BP1-S2|0:45:52-0:46:15|: "¿A qué distancia se intersecan las dos rectas?, ¿a qué distancia? A la mitad, la mitad de una circunferencia máxima, porque esto de acá a acá es la mitad de una y esta es la mitad de la otra [señalando los meridianos]". En sus HT, presenta dos esquemas en los que señala la distancia que hay del polo norte al ecuador y del polo norte al polo sur (ver figura 48).

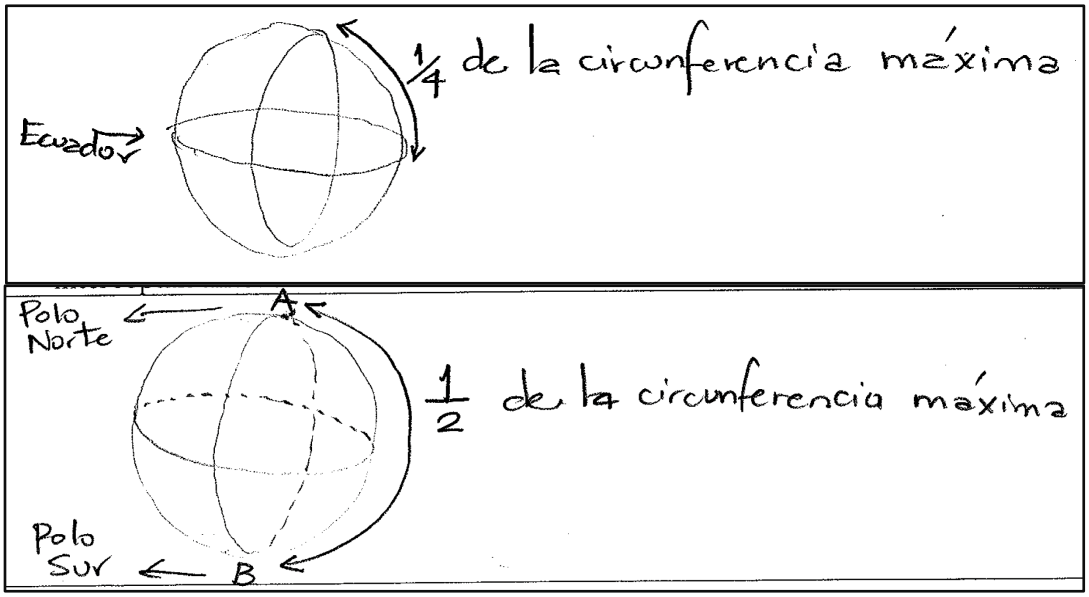


Figura 48. Respuesta a la T11 y T12 por el BP1. Fuente: HT.

Equipo C:

(T1) En la discusión en equipos, V-CPa1-S2|0:09:46-0:09:48|: "No se relacionan en nada". Sin embargo, en sus HT, los tres miembros describen que tienen las rectas que se intersecan y las que no lo hacen. Al igual que el equipo B, una profesora, la CPa3, construyó rectas paralelas y los otros dos miembros del equipo, rectas oblicuas; por ejemplo, la construcción de la CPa1 se muestra en la figura 49.

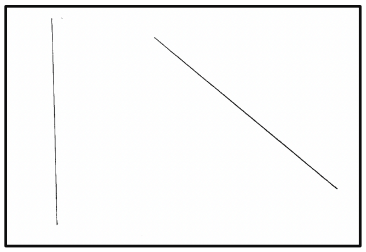


Figura 49. Construcción de dos rectas planas por CPa1. Fuente: HT.

(T2) Ante la analogía que hace el AP3 sobre que los paralelos son rectas paralelas al ecuador, la V-CPa1-S2|0:13:46-0:09:48|: “Sí, tiene razón”. El V-CP2-S2|0:14:00-0:14:07|: “Si nosotros tenemos una recta y tenemos otra recta por acá [señala en una hoja esférica la posibilidad de dos rectas paralelas (ver figura 50)]”. El IP pregunta si esa otra recta que señala [el paralelo al ecuador] es una línea recta en la esfera. El V-CP2-S2|0:14:15-0:14:17|: “Sería una circunferencia”. El IP pregunta si sería una circunferencia máxima, y el V-CP2-S2|0:14:20-0:14:20|: “No”.

Figura 50. El CP2 señala posibles rectas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.

Al probar con el hilo tenso, el V-CP2-S2|0:17:43-0:14:07|: “Siempre todas las circunferencias se van a tocar”. Cuando el IP pregunta si se mantienen las relaciones en la esfera, V-CPa3-S2|0:20:47-0:20:47|: “No”. Luego el IP pregunta cuáles se mantienen; el equipo completo responde que las que se intersecan. Después de la pregunta del AP3 sobre los paralelos y las paralelas, y la pregunta del IP sobre qué serían los paralelos que no son el ecuador, V-CPa1-S2|0:23:50-0:09:48|: “Circunferencias en la esfera”. El CP2 y la CPa1 marcan los dos meridianos (ver figura 51).

Figura 51. CP2 y CPa1 marcan meridianos en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 2.

(T7) V-CPa1-S2|0:35:09-0:35:10|: “Se van alejando”, V-CP2-S2|0:35:11-0:35:17|: “Sí, en el ecuador es donde se encuentra el punto máximo [refiere al mayor arco]; en el ecuador es donde está la distancia máxima”.

(T10) La V-CPa3-S2|0:46:48-0:46:50|: “Aparte de que se intersecan, porque eso ya lo sabemos”, V-CP2-S2|0:46:53-0:47:00|: “Se alejan hasta el ecuador, y se acercan”, V-CPa3-S2|0:47:21-0:47:21|: “Qué sucede”, V-CP2-S2|0:47:27-0:47:36|: “Se expanden… es que tendría que haber un punto medio entre ambas porque el comportamiento es cambiante, hasta el ecuador”. Cuando escucho al IP preguntar qué es lo que está cambiando, V-CP2-S2|0:48:26-0:48:27|: “La distancia entre las paralelas”. El IP les pregunta qué sucede, V-CP2-S2|0:49:00-0:49:15|: “Se alejan y luego se acercan, independientemente cuál de los dos puntos consideremos, o bien se van a alejar y luego después de un cierto punto van a comenzar otra vez a acercarse”. En sus HT también señala ese cambio, al igual que sus compañeras, por ejemplo, ver respuesta de la CPa1 en la figura 52.

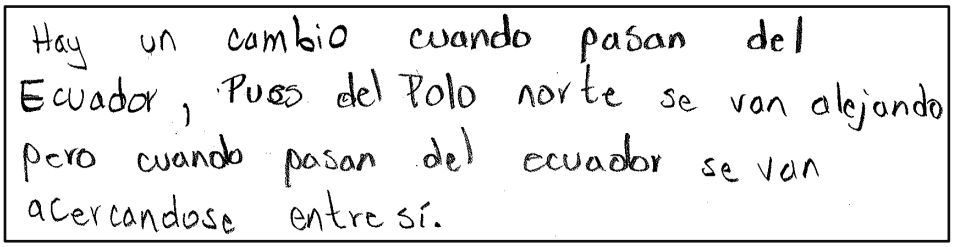
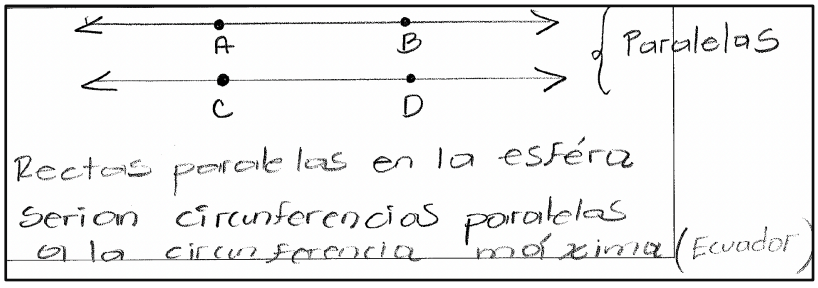
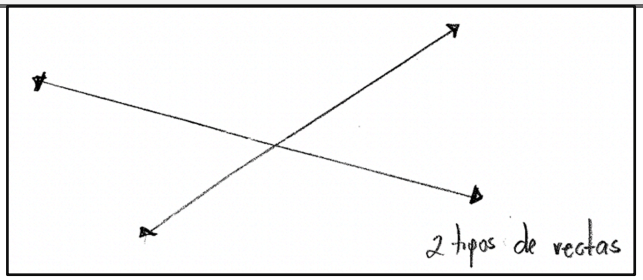
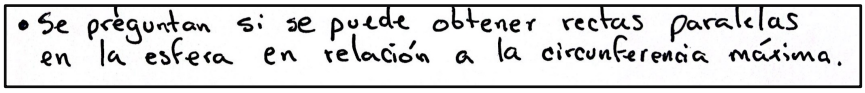
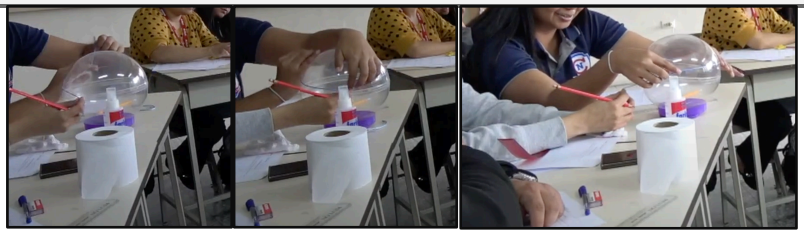


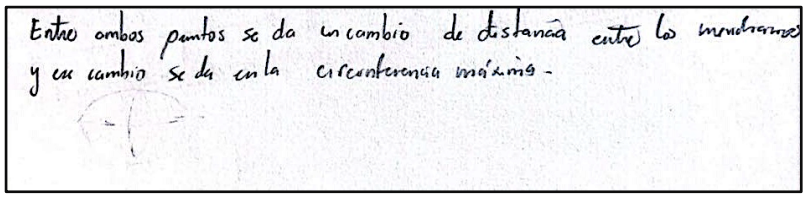
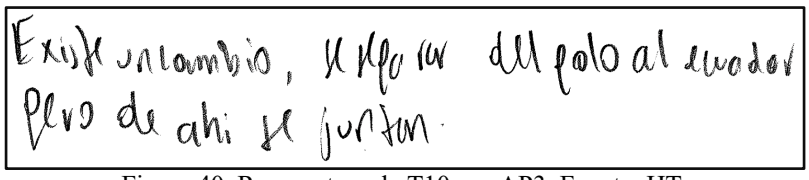
Figura 52. Respuesta de la T10 por CPa1. Fuente: HT.

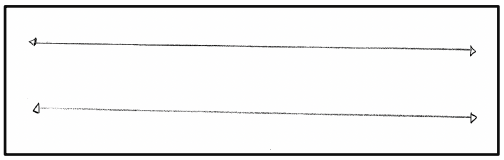
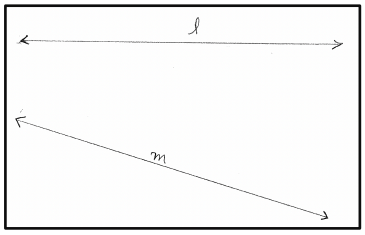
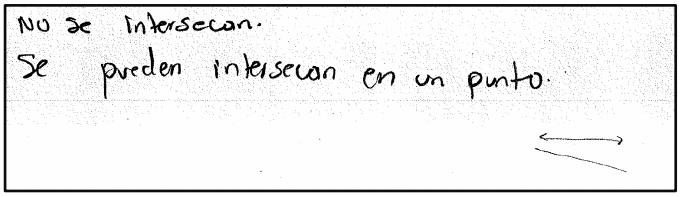
3-1 Análisis de prácticas (acciones y actividades): parte III

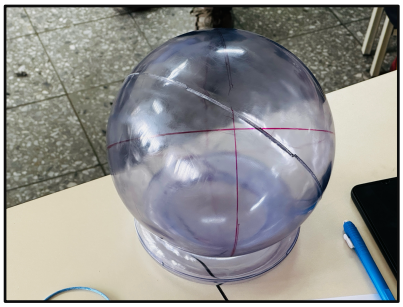
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Equipo A: Se le pregunta al AP3 por la caracterización de la recta que dio sobre el ángulo, V-AP3-S2|0:00:18-0:01:13|: "Sí, no sé si la recta, al estar así, forma un ángulo recto, la recta con el plano… No sé, lo asocié con el ángulo en ese momento, no sé si tiene algo que ver la definición de línea recta con el ángulo recto". El IP muestra las dos palmas juntas y le dice que si una es el plano y la otra la recta, qué ángulo habría, V-AP3-S2|0:01:12-0:01:13|: "De 180, que es un múltiplo de 90, podría ser un ángulo de 90 por otro número" [idea asociada a la caracterización de recta de la sesión 1], esto también el investigador-profesor lo registra en sus notas (ver figura 29). Nota1: **Nombre** refería al ángulo de 180 grados para referir a la linealidad o un múltiplo de 90. Figura 29. Nota de investigador-profesor sobre la linealidad según AP3. Fuente: NIP.	**Relacionan** a la recta con el ángulo recto y el ángulo llano. **Reconocen** que en todos los puntos de la recta el ángulo de un lado al otro es de 180 grados.	Caracterizando la linealidad de la recta, asocian el ángulo recto y el ángulo llano.
(T1) En la DG, la V-APa1-S2|0:10:51-0:15:30|: "Bueno, llegamos a la conclusión que mis dos compañeros, que dibujaron rectas oblicuas, que son oblicuas, que se intersecan y no tienen más forma de relacionarse, y las mías no se intersecan", según el investigador-observador esta intersección se entiende como la forma de relacionarse (ver figura 30). En este caso, solo la APa1 dibujó rectas paralelas; además, piensa en lo que serían las paralelas en la esfera [esto es algo que no era parte de la actividad en esta tarea] (ver figura 31). Por su parte, la APa2 fue la única de todo el grupo de participantes que presenta en la construcción la intersección de dos rectas (ver figura 32). III. **Notas sobre el conocimiento matemático:** Observaciones de la población participante sobre aspectos puntuales del conocimiento matemático involucrado en la situación. Nota1: • Una relación entre rectas que los estudiantes manifiestan que se conserva es la intersección entre rectas. (Del plano a la esfera) Figura 30. Nota de investigador-observador sobre la intersección de rectas. Fuente: NIO.  Figura 31. Respuesta T1 por APa1. Fuente: HT.	**Tranzan** rectas oblicuas y paralelas. **Relacionan** rectas a través de la intersección. **Discuten** los tres casos que construyeron en el equipo. **Reconocen** elementos en común y diferentes en los tres casos construidos. **Diferencian** las rectas, las que se intersecan y las que no. **Identifican** circunferencias paralelas a la circunferencia máxima [las reconocen rectas paralelas en la esfera consecuencia de esa generalización euclidiana]. **Diferencian** las rectas, las que se	**Usando** una regla plana **trazan** dos rectas en la posición que gusten. Al conocer los casos de sus compañeros de equipo reconocen que se relacionan por las intersecciones, de aquí que las clasifican entre las que se intersecan y las que no. **Trasladando** la idea de paralelismo a la esfera, **considerando** al esfera como un objeto geométrico y no como una superficie para el trabajo geométrico. Al conocer los casos de sus

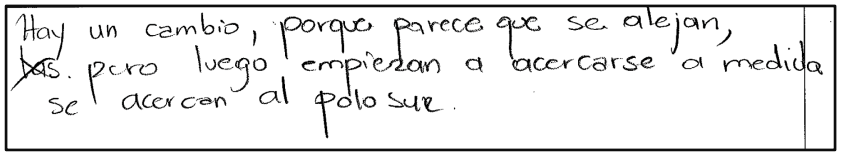
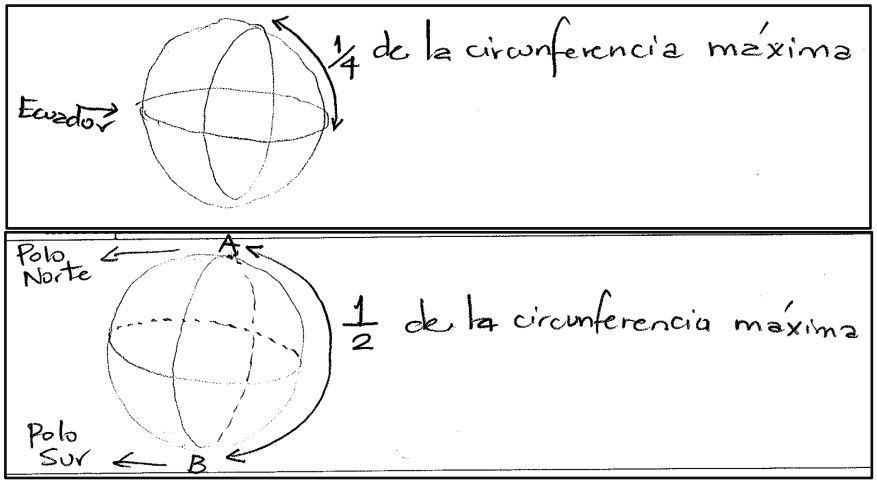
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 32. Respuesta T1 por APa2. Fuente: HT.	intersecan de las que no lo hacen.	compañeros de equipo reconocen que se relacionan por las intersecciones, de aquí que las clasifican entre las que se intersecan y las que no.
Al preguntar si tenemos algunas rectas oblicuas especiales, todos responden que las perpendiculares. Sin embargo, el V-AP3-S2|0:14:18-0:01:13|: "Tengo una consulta con lo de las rectas, y cuando son alabeadas [rectas que están en planos distintos]". El IP hace la aclaración de que estamos trabajando en el mismo plano.	**Reconocen** rectas perpendiculares (un tipo especial de oblicuas). **Reconocen** rectas en distintos planos, las rectas alabeadas.	La clasificación de rectas en el plano los hacen pensar en rectas que están en diferentes planos.
(T2) Al preguntar si se darán esas relaciones en la esfera, V-APa1-S2|0:13:17-0:13:20|: "Podemos tener circunferencias paralelas", señala circunferencias paralelas al ecuador (ver figura 33). El V-AP3-S2|0:13:38-0:13:45|: "Según lo que sé de geografía, sí, porque están los meridianos y los paralelos, o sea que si son paralelos son paralelas". Estos cuestiomientos también son señalados por el investigador-observador (ver figura 34).	**Identifican** circunferencias paralelas a la circunferencia máxima. **Comparan** su construcción con nociones geográficas. **Relacionan** paralelos con paralelas.	**Señalando** en la esfera circunferencias menores paralelas al ecuador. **Relacionando** esas relaciones con geografía, la existencia de los paralelos hace que conciban existencia de paralelas.
 Figura 33. APa1 señala circunferencias paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.		
 Figura 34. Nota de investigador-observador sobre rectas paralelas en la esfera. Fuente: NIO.		
Para verificar la existencia de paralelas en la esfera, la APa1 solicita hilo e intenta tensar el hilo en una circunferencia menor, paralela al ecuador (ver figura 35), y menciona V-APa1-S2|0:17:38-0:17:38|: "Se va [es decir, el hilo se desliza]". Mueve la circunferencia hasta llegar al ecuador, logra tensar el hilo, dice V-APa1-S2|0:17:53-0:18:20|: "Esta es la máxima, parece que no, no queda el hilo tenso". Además, agrega V-APa1-S2|0:19:24-0:17:38|: "Que la tensión de la cuerda depende de qué tan alejado o cercano esté del ecuador".	**Procuran** tensar la cuerda en circunferencias paralelas a la circunferencia máxima. **Observan** que el hilo en circunferencias paralelas se desliza hacia el polo. **Trasladan** las paralelas acercándose a la recta. **Reconocen** que el hilo se puede tensar	Con hilo **intentan** construir circunferencias máximas paralelas a la recta inicial, sin embargo, **notan** que el hilo no se mantiene tenso. **Mueven** la circunferencia acercándose a la recta, **notan** que a medida que se acerca a la recta la tensión de cuerda cambia (se va tensando), hasta

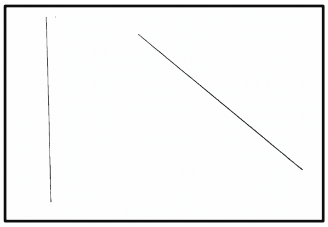
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 35. APa1 intentar construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2. Las profesoras APa1 y APa2 toman la regla esférica e intentan colocarla paralela al ecuador (ver figura 36). En la DG, al preguntar si podemos tener rectas perpendiculares, el V-AP3-S2|0:21:07-0:21:07|: "Sí". Figura 36. APa1 y APa2 intentan construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2. El V-AP3-S2|0:22:45-0:21:07|: "El paralelismo en la esfera se podría dar de diferentes maneras; yo lo que pensábamos era como, en función a la circunferencia máxima". El IP hace una explicación de por qué los meridianos son rectas y los paralelos no, excepto el ecuador. La profesora APa1 marca los meridianos en el globo terráqueo (ver figura 37). Figura 37. APa1 marca meridianos en el globo terráqueo. Fuente: Fotografía-sesión 2. Todos los equipos reconocen que todos los meridianos y antimeridianos son líneas rectas en el globo terráqueo (T3, T4), además de que de los paralelos solo el ecuador es línea recta esférica (T5, T6).	solo en la circunferencia máxima. **Observan y reconocen** que a medida que la circunferencia se acerca a la circunferencia máxima es más fácil tensar la cuerda (la tensión de la cuerda cambia). **Procuran** mostrar circunferencias paralelas a la circunferencia máxima. **Reconocen** que la idea de paralelismo se puede presentar en la esfera (como en el caso de los paralelos, como planos paralelos que cortan a la Tierra). **Marcan** dos meridianos en el globo terráqueo. **Establecen** que todos los meridianos y antimeridianos son rectas en la esfera y de los paralelos, solo el ecuador. **Analizan** el cambio en los arcos de los	que sobre la recta se puede tensar totalmente. Con la regla esférica **intentan** construir circunferencias máximas paralelas a la recta inicial, sin embargo, **notan** que la regla no se sobrepone totalmente en la superficie de la esfera. Pensando la esfera como un objeto geométrico y los paralelos como planos paralelos que cortan a la Tierra. Con líneas punteadas remarcan dos meridianos en un globo terráqueo. **Relacionan** sus conclusiones con las nociones geográficas. **Interpretando** la medida de los arco de los paralelos a

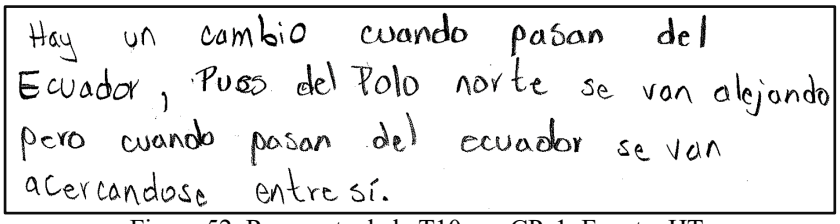
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
(T7) La V-APa1-S2|0:33:09-0:17:38|: "Vamos viendo que se va haciendo máximo; pareciera que en el ecuador que no está señalizado [lo señala con su mano, ver figura 38a], luego va disminuyendo de polo a polo. En el polo inicial va aumentando y después, al llegar al otro polo, va disminuyendo [marca el aumento y disminución con sus manos, ver figura 38b]". (T8) Cuando se presenta esta pregunta, V-APa1-S2|0:38:48-0:39:01|: "Se van acercando". Ante la pregunta de qué suceso ocurre entre los meridianos (T10), la V-APa1-S2|0:42:20-0:42:59|: "Guardan la distancia del polo norte al polo sur, la distancia del polo norte al ecuador es ¼, y luego cambia a esa distancia… El polo norte y el polo sur, ambos, son puntos de intersección". El IP menciona: "Sí, son puntos de intersección, son opuestos, entre ellos hay un cambio, pero ¿qué cambia?"; V-APa1-S2|0:43:25-0:42:59|: "Cuando llegamos a la circunferencia máxima, luego va a haber una disminución". El IP menciona, entonces, esta cambiando la amplitud de los arcos, de crecimientos a decrecimientos. Figura 38a. APa1 señala el ecuador. Fuente: Fotografía-sesión 2. Figura 38b. APa1 marca el aumento y disminución de los arcos de círculo. Fuente: Fotografía-sesión 2.	paralelos entre dos meridianos. **Observan y reconocen** que a medida se alejan del polo norte los arcos aumentan. **Observan y reconocen** que a medida se acercan al polo sur los arcos disminuyen. **Identifican** que en el ecuador se da el cambio de aumentar a disminuir. **Miden** la distancia de los polos al ecuador (es de ¼). Y **reconocen** que a esa distancia cambia el comportamiento. **Reconocen** que las interseccionesse dan en los polos.	medida que se alejan del polo norte y a medida que se acercan al polo sur. Producto de esta interpretación **exponen** propiedades de los elementos involucrados (los polos son los puntos de intersección, en el ecuador se da el cambio, y la medida de los arcos aumenta y disminuyen).
Por su parte, la APa2 en sus hojas de trabajo reconoce el cambio asociado a la distancia entre meridianos; además, reconoce que el cambio se da en el ecuador (ver figura 39). El AP3 señala el comportamiento de esas rectas con los verbos separar y juntar (ver figura 40).  Figura 39. Respuesta a la T10 por APa2. Fuente: HT.  Figura 40. Respuestas a la T10 por AP3. Fuente: HT.	**Caracterizan** el comportamiento de los arcos de círculo (se separan y se juntan). **Reconocen** que el cambio se da en la circunferencia máxima (ecuador). **Miden** la distancia del polo al cambio de comportamiento y la distancia entre los dos polos.	Describiendo la construcción y el comportamiento de los arcos de círculo. **Descomponen** a la circunferencia máxima en cuartos y en medios, según en comportamiento

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Toda la población participante está de acuerdo en que el cambio de comportamiento entre los dos meridianos será a ¼ de circunferencia máxima (T11) y que vuelven a intersecarse a ½ de circunferencia máxima o una semicircunferencia (T12).	**Reconocen** al cuarto de circunferencia y a la semicircunferencia como segmentos importantes.	de los arcos de círculo.
Equipo B:		
En repaso de las ideas más importantes de la sesión anterior, se les preguntó qué cosas se tienen en el plano como consecuencia del paralelismo y se perderían en la esfera; ante ello, el V-BP1-S2|0:06:25-0:06:30|: "Todo lo que se deriva del paralelismo, como los rectángulos, cuadrados, paralelogramos".	**Explicitan** relaciones de dependencia entre nociones geométricas.	Construyendo dos rectas planas. Interpretando las construcciones de todo el equipo.
(T1) Después de la construcción de las dos rectas, discuten en los equipos. El V-BP1-S2|0:09:02-0:09:08|: "Bueno [menciona el nombre de la BPa2], hizo paralelas, pero yo no; se parece a la suya, pero igual está más inclinada". La construcción de la BPa2 se presenta en la figura 41 y la construcción del BP1 en la figura 42, la V-BPa3-S2|0:09:17-0:09:20|: "Creo que cuando usted siga [refiere a que si continúa la recta], van a intersecarse en un punto, mientras que las de [menciona el nombre de la BPa2] no", el V-BP1-S2|0:09:24-0:09:26|: "Depende, parecen paralelas", la V-BPa2-S2|0:09:27-0:09:36|: "Parecen paralelas, pero no sabemos, hay que medir si en todos los puntos son equidistantes", la V-BPa3-S2|0:09:37-0:09:20|: "Es como una hipótesis".	**Reconocen** la inexistencia de paralelogramos en la esfera. **Construyen** rectas paralelas y rectas oblicuas. **Agregan** símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud). **Nombran** las rectas con letras minúsculas. **Exponen** propiedades de las rectas (pueden prolongarse). **Reconocen** propiedades de las rectas paralelas (son equidistantes). **Diferencian** una construcción geométrica de un bosquejo (lo presentan como hipótesis).	Clasificando las construcciones en rectas paralelas y no paralelas. Además, reconociendo que sus construcciones son bosquejos. Explicitando que a pesar de que no se ve en el diagrama la intersección de dos rectas oblicuas, se dará cuando esas rectas se extienda.
 Figura 41. Construcción de las dos rectas por BPa2. Fuente: HT.		
 Figura 42. Construcción de las dos rectas por BP. Fuente: HT.		
En sus hojas de trabajo, la BPa3 menciona que se relacionan por la no intersección o por la intersección en un punto [generalización euclidiana] (ver figura 43).	**Relacionan** las rectas por la intersección. **Reconocen** que dos rectas que se intersecan solo pueden hacerlo en un punto. **Representan** en sus diagrama propiedades de la recta (flechas).	**Clasificando** sus construcciones en las que se intersecan de las que no. **Agregando** símbolos a sus representaciones.
 Figura 43. Respuesta a la T1 por BPa3. Fuente: HT.		

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
(T2) En la DG, al preguntar si podemos tener rectas perpendiculares, el equipo menciona que ellos dibujaron dos rectas perpendiculares (ver figura 44).  Figura 44. Construcción de rectas en la esfera por el equipo B. Fuente: Fotografía-sesión 2.	**Trazan** una de las relaciones de rectas planas en la esfera. **Trazan** dos rectas perpendiculares.	Buscando construir alguna de las relaciones entre rectas que se evidenciaron en el plano y usando la regla esférica.
Inicialmente, marcaron un meridiano con su antimeridiano (ver figura 45). Por el uso que se daría a la construcción, se les pidió que fuera semejante a la construcción en la esfera de Lénart, por lo que la cambiaron. Figura 45. El BP1 marca un meridiano con su antimeridiano en el globo terráqueo. Fuente: Fotografía-sesión 2.	**Trazan** un meridiano y un antimeridiano. **Cambian** su construcción por una semejante a su construcción en la esfera. **Diferencian** los meridianos de los antimeridianos.	Dibujando en el globo una recta completa, un meridiano y su antimeridiano. Pero al solicitar una construcción semejante a su construcción en la esfera la modifican.
(T5) Cuando se pregunta por los círculos que tienen como centro el polo norte y el polo sur, el V-BP1-S2|0:27:21-0:27:32|: Se ubica en uno de los polos y señala diferentes círculos esféricos (ver figura 46), luego menciona V-BP1-S2|0:27:32-0:27:34|: "Son los paralelos". Figura 46. El BP1 señala diferentes paralelos. Fuente: Video-sesión 2.	**Señalan** los círculos que tienen como centro el polo norte y el polo sur. **Reconocen** esos círculos como paralelos.	Tomando el globo, **identifican** el polo norte y **señalan** diferentes círculos que tienen ese polo como centro.
(T7) En la DE, el V-BP1-S2|0:34:00-0:27:34|: "Tendremos que dibujar uno [refiere a dibujar un arco de círculo], ah, pero cómo lo dibujamos, uno cerca", se pone de acuerdo en dibujar un círculo cercano al polo. V-BPa3-S2|0:34:10-0:34:19|: "Pero el detalle está	**Dibujan** un arco de círculo cercano al polo sur.	Deciden dibujar arcos de círculos para observar su comportamiento.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
en que, si se fijan, cuando ya va más acá, se acercan". Entonces el V-BP1-S2|0:34:20-0:34:23|: "Sí, a medida se va acercando al polo, el arco es más pequeño [hace el proceso inverso al sugerido en la instrucción]". La V-BPa3-S2|0:34:50-0:34:19|: "Qué extraño verdad, algo sucede". (T9) Ante esta pregunta, el V-BP1-S2|0:39:30-0:39:31|: "Se tiene la separación más grande". (T10) El V-BP1-S2|0:44:15-0:44:20|: "Es que no entiendo la pregunta". V-BPa3-S2|0:44:20-0:44:23|: "No sé, que la distancia cambia", el V-BP1-S2|0:45:04-0:45:10|: "No sé, no encuentro la palabra, o sea, lo que sucede es esto [señalando el cambio de longitud de los arcos]", V-BPa3-S2|0:45:38-0:44:23|: "Cambia el comportamiento de las rectas". En sus HT, el BP1 reconoce el cambio usando los términos alejarse y acercarse (ver figura 47).  Figura 47. Respuesta a la T10 por BP1. Fuente: HT.	**Observan y reconocen** que los arcos de círculo se hacen más pequeños a medida se acercan al polo sur. **Notan** que en el ecuador se da la separación máxima entre los meridianos. **Observan** que la distancia de los arcos cambia. **Muestran** el cambio en las longitudes de los arcos. **Caracterizan** el cambio con los términos alejarse y acercarse.	Primero observan este comportamiento cuando se acercan al polo sur. Además, **identifican** al ecuador como la separación máxima o el arco de mayor tamaño. Lo primero que notan es que las longitudes están cambiando, luego que cambian de alejarse a acercarse.
(T11) El V-BP1-S2|0:45:52-0:46:15|: "¿A qué distancia se intersecan las dos rectas?, ¿a qué distancia? A la mitad, la mitad de una circunferencia máxima, porque esto de acá a acá es la mitad de una y esta es la mitad de la otra [señalando los meridianos]". En sus HT, presenta dos esquemas en los que señala la distancia que hay del polo norte al ecuador y del polo norte al polo sur (ver figura 48).  Figura 48. Respuesta a la T11 y T12 por el BP1. Fuente: HT.	**Dividen** la circunferencia máxima en mitades y en cuartos. **Atribuyen** al cuarto y al medio de circunferencia máxima propiedades en el comportamiento de los meridianos y paralelos. **Representan** la distancia del polo al cambio de comportamiento y la distancia de polo a polo.	**Cuestionando** las distancias en las que el comportamiento de los arcos cambia y en el que se da la otra intersección.
Equipo C:		
(T1) En la discusión en equipos, V-CPa1-S2|0:09:46-0:09:48|: "No se relacionan en nada". Sin embargo, en sus HT, los tres miembros describen que tienen las rectas que se intersecan y las que no lo hacen. Al igual que el equipo B, una profesora, la CPa3,	**Niegan** la relación entre rectas. **Analizan** las construcciones de rectas en el equipo.	En las representaciones no muestran intersecciones, y no reconocen relación

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
construyó rectas paralelas y los otros dos miembros del equipo, rectas oblicuas; por ejemplo, la construcción de la CPa1 se muestra en la figura 49.  Figura 49. Construcción de dos rectas planas por CPa1. Fuente: HT.	**Diferencian** las rectas entre las que se intersecan y las que no. **Trazan** rectas paralelas y oblicuas.	entre las rectas. Pero al observar las construcciones de todos los miembros separan las rectas paralelas de las oblicuas.
(T2) Ante la analogía que hace el AP3 sobre que los paralelos son rectas paralelas al ecuador, la V-CPa1-S2|0:13:46-0:09:48|: "Sí, tiene razón". El V-CP2-S2|0:14:00-0:14:07|: "Si nosotros tenemos una recta y tenemos otra recta por acá [señala en una hoja esférica la posibilidad de dos rectas paralelas (ver figura 50)]". El IP pregunta si esa otra recta que señala [el paralelo al ecuador] es una línea recta en la esfera. El V-CP2-S2|0:14:15-0:14:17|: "Sería una circunferencia". El IP pregunta si sería una circunferencia máxima, y el V-CP2-S2|0:14:20-0:14:20|: "No". Figura 50. El CP2 señala posibles rectas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.	**Aceptan** la existencia de paralelas por la existencia de los paralelos. **Trasladan** ideas de geografía a la esfera. **Muestran** circunferencia paralelas al ecuador. **Reconocen** que esas circunferencias no son máximas.	La analogía de los paralelos con rectas paralelas los lleva a señalar circunferencias que son paralelas al ecuador, pero al pensar si esas circunferencias son máximas reconocen que no.
Al probar con el hilo tenso, el V-CP2-S2|0:17:43-0:14:07|: "Siempre todas las circunferencias se van a tocar". Cuando el IP pregunta si se mantienen las relaciones en la esfera, V-CPa3-S2|0:20:47-0:20:47|: "No". Luego el IP pregunta cuáles se mantienen; el equipo completo responde que las que se intersecan. Después de la pregunta del AP3 sobre los paralelos y las paralelas, y la pregunta del IP sobre qué serían los paralelos que no son el ecuador, V-CPa1-S2|0:23:50-0:09:48|: "Circunferencias en la esfera". El CP2 y la CPa1 marcan los dos meridianos (ver figura 51).	**Verifican** las relaciones de rectas planas en la esfera. **Reconocen** que en la esfera todas las circunferencias se van a tocar (propiedad). **Admiten** la inexistencia del paralelismo en la esfera. **Caracterizan** a los paralelos diferentes al ecuador como circunferencias esféricas. **Trazan** dos meridianos en el globo terráqueo.	Con cuerdas tensan, **procuran** construir las relaciones de rectas planas en la esfera. De esas construcciones **deducen** que todas las rectas en la esfera siempre se intersecan.

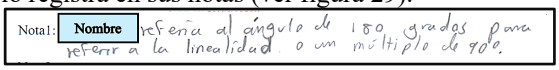
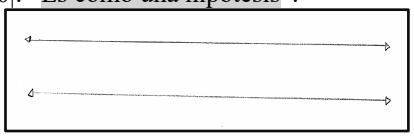
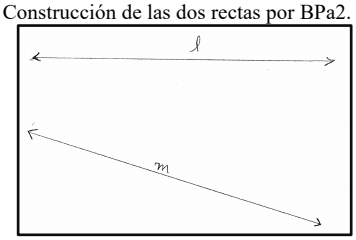
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 51. CP2 y CPa1 marcan meridianos en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 2. (T7) V-CPa1-S2|0:35:09-0:35:10|: "Se van alejando", V-CP2-S2|0:35:11-0:35:17|: "Sí, en el ecuador es donde se encuentra el punto máximo [refiere al mayor arco]; en el ecuador es donde está la distancia máxima". (T10) La V-CPa3-S2|0:46:48-0:46:50|: "Aparte de que se intersecan, porque eso ya lo sabemos", V-CP2-S2|0:46:53-0:47:00|: "Se alejan hasta el ecuador, y se acercan", V-CPa3-S2|0:47:21-0:47:21|: "Qué sucede", V-CP2-S2|0:47:27-0:47:36|: "Se expanden… es que tendría que haber un punto medio entre ambas porque el comportamiento es cambiante, hasta el ecuador". Cuando escucho al IP preguntar qué es lo que está cambiando, V-CP2-S2|0:48:26-0:48:27|: "La distancia entre las paralelas". El IP les pregunta qué sucede, V-CP2-S2|0:49:00-0:49:15|: "Se alejan y luego se acercan, independientemente cuál de los dos puntos consideremos, o bien se van a alejar y luego después de un cierto punto van a comenzar otra vez a acercarse". En sus HT también señala ese cambio, al igual que sus compañeras, por ejemplo, ver respuesta de la CPa1 en la figura 52.  Figura 52. Respuesta de la T10 por CPa1. Fuente: HT.	**Observan** y reconocen que a medida que se alejan del polo norte los arcos se van alejando (aumentan de tamaño). **Identifican** que el arco de mayor tamaño está en el ecuador. **Reconocen** dos intersecciones (en los polos) y un cambio (se alejan hasta el ecuador y se acercan hasta el otro polo). **Caracterizan** el comportamiento como cambiante. **Caracterizan** el cambio con los términos: se alejan y se acercan. **Reconocen** que ese cambio se puede observar independientemente del polo que se tome como inicial.	Analizando el cambio de longitud en los arcos de círculo a media de alejan del polo norte y a medida se acercan al polo sur. Reconocen elementos importantes como las intersecciones, el ecuador y el cambio en la longitud de los arcos.

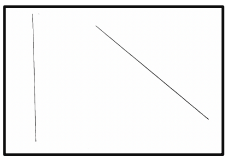
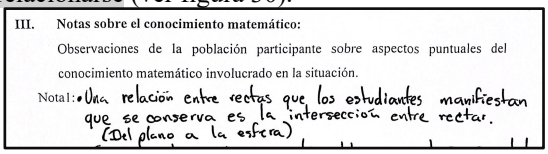
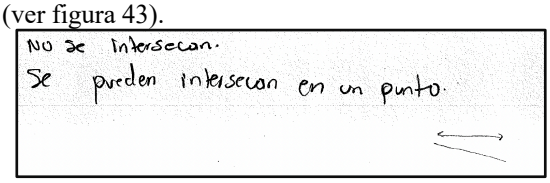
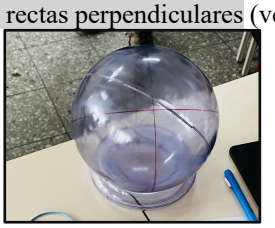
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
Relacionan a la recta con el ángulo recto y el ángulo llano, reconocen que en todos los puntos de la recta el ángulo de un lado al otro es de 180 grados; agregan símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud); nombran las rectas con letras minúsculas; exponen propiedades de las rectas (pueden prolongarse); para **reconocer propiedades de la recta**.

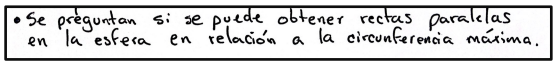
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
Tranzan rectas oblicuas y paralelas; agregan símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud); nombran las rectas con letras minúsculas; exponen propiedades de las rectas (pueden prolongarse, las paralelas son equidistantes); diferencian una construcción geométrica de un bosquejo (lo presentan como hipótesis); relacionan rectas a través de la intersección; reconocen que dos rectas que se intersecan solo pueden hacerlo en un punto; reconocen rectas perpendiculares; para **reconocer propiedades en la relación de dos rectas planas** (pueden o no intersecarse; si se intersecan solo se intersecan en un punto; la existencia del paralelismo, oblicuidad y perpendicularidad). Tranzan rectas oblicuas y paralelas; agregan símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud); nombran las rectas con letras minúsculas; exponen propiedades de las rectas (pueden prolongarse, las paralelas son equidistantes); diferencian una construcción geométrica de un bosquejo (lo presentan como hipótesis); relacionan rectas a través de la intersección; reconocen rectas perpendiculares; reconocen rectas en distintos planos, las rectas alabeadas; diferencian pares de rectas, las que se intersecan y las que no; para **clasificar las relaciones de dos rectas planas** (en un mismo plano: paralelas, oblicuas y perpendiculares; en planos diferentes: alabeadas). Trazan una de las relaciones de rectas planas en la esfera; trasladan el paralelismo a la esfera; comparan su construcción con nociones geográficas; relacionan paralelos con paralelas; identifican circunferencias paralelas a la circunferencia máxima; procuran mostrar circunferencias paralelas a la circunferencia máxima, tensando la cuerda y colocando la regla esférica no superpuesta en la superficie; notan que el hilo en circunferencias paralelas se desliza hacia el polo; trasladan las paralelas acercándose a la recta; observan y reconocen que a medida que la circunferencia se acerca a la circunferencia máxima es más fácil tensar la cuerda (la tensión de la cuerda cambia); reconocen que el hilo se puede tensar solo en la circunferencia máxima; caracterizan a los paralelos diferentes al ecuador como circunferencias esféricas; reconocen que en la esfera todas las circunferencias se van a intersecar; para **asentir la inexistencia del paralelismo en la esfera**. Marcan dos meridianos en el globo terráqueo; establecen que todos los meridianos y antimeridianos son rectas en la esfera y de los paralelos, solo el ecuador es recta; señalan los círculos que tienen como centro el polo norte y el polo sur; reconocen esos círculos como paralelos; analizan el cambio en los arcos de los paralelos entre dos meridianos; observan y reconocen que a medida se alejan del polo norte los arcos aumentan; observan y reconocen que a medida se acercan al polo sur los arcos disminuyen; identifican que en el ecuador se da el cambio de aumentar a disminuir; exponen propiedades de los elementos involucrados (los polos son los puntos de intersección, en el ecuador se da el cambio, y la medida de los arcos aumenta y disminuyen); caracterizan el comportamiento de los arcos de círculo (se separan y se juntan, se alejan y se acercan, es cambiante); descomponen a la circunferencia máxima en cuartos y en medios, según en comportamiento de los arcos de círculo; miden la distancia del polo al cambio de comportamiento y la distancia entre los dos polos; atribuyen al cuarto y al medio de circunferencia máxima propiedades en el comportamiento de los meridianos y paralelos; para **reconocer propiedades en la relación de dos rectas esféricas** (siempre se intersecan en dos puntos; se relacionan divergiendo y convergiendo; la existencia de la perpendicularidad y la oblicuidad; y la inexistencia del paralelismo).

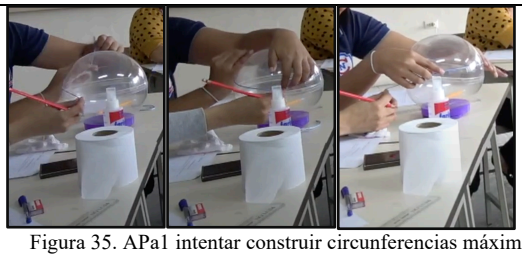
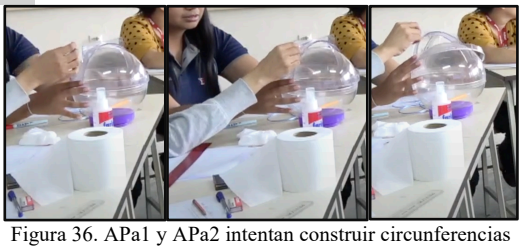
2-2 Análisis de usos: parte III

En el papel que desempeña la noción matemática en la tarea se hará una distinción entre el plano [p] y la esfera [E]. En la tabla anterior (análisis de acciones y actividades), se marcarán las acciones y actividades donde estén involucradas las nociones matemáticas de interés.

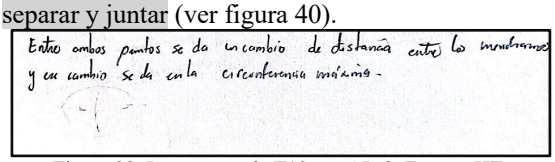
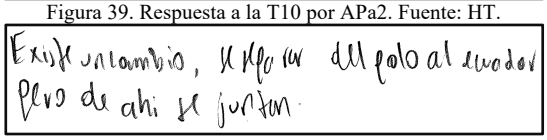
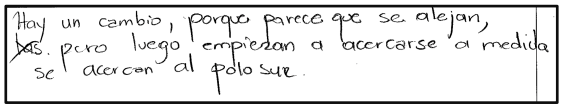
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Recta y segmento de recta plano y esférico			
En las acciones	Relacionan a la recta con el ángulo recto y el ángulo llano. Reconocen que en todos los puntos de la recta el ángulo de un lado al otro es de 180 grados.	Se le pregunta al AP3 por la caracterización de la recta que dio sobre el ángulo, V-AP3-S2|0:00:18-0:01:13|: "Sí, no sé si la recta, al estar así, forma un ángulo recto, la recta con el plano… No sé, lo asocié con el ángulo en ese momento, no sé si tiene algo que ver la definición de línea recta con el ángulo recto". El IP muestra las dos palmas juntas y le dice que si una es el plano y la otra la recta, qué ángulo habría, V-AP3-S2|0:01:12-0:01:13|: "De 180, que es un múltiplo de 90, podría ser un ángulo de 90 por otro número" [idea asociada a la caracterización de recta de la sesión 1], esto también el investigador-profesor lo registra en sus notas (ver figura 29).  Figura 29. Nota de investigador-profesor sobre la linealidad según AP3. Fuente: NIP.	Busca caracterizar la rectitud de la recta, por lo que asocia el nombre con el ángulo recto o un múltiplo de él. Logrando reconocer que en todos sus puntos el ángulo de un lado al otro es de 180 grados.	Recta **compuesta por puntos** [P]. Recta **desde el ángulo llano** (en todos sus puntos, si ese punto es el vértice, el ángulo entre los dos lados es siempre de 180 grados) [P].
	Agregan símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud). Nombran las rectas con letras minúsculas. Exponen propiedades de las rectas (pueden prolongarse, las paralelas son equidistantes). Diferencian una construcción geométrica de un bosquejo (lo presentan como hipótesis).	La construcción de la BPa2 se presenta en la figura 41 y la construcción del BP1 en la figura 42, la V-BPa3-S2|0:09:17-0:09:20|: "Creo que cuando usted siga [refiere a que si continúa la recta], van a intersecarse en un punto, mientras que las de [menciona el nombre de la BPa2] no", el V-BP1-S2|0:09:24-0:09:26|: "Depende, parecen paralelas", la V-BPa2-S2|0:09:27-0:09:36|: "Parecen paralelas, pero no sabemos, hay que medir si en todos los puntos son equidistantes", la V-BPa3-S2|0:09:37-0:09:20|: "Es como una hipótesis".  Figura 41. Construcción de las dos rectas por BPa2. Fuente: HT.  Figura 42. Construcción de las dos rectas por BP. Fuente: HT.	Trazan dos representaciones de rectas en el plano, agregan flechas en sus extremos y nombran las rectas. Analizando las representaciones notan que al continuar las rectas m y l se van a intersecar (por la inclinación). Además, que se van a intersecar en un punto. En otra representación, reconocen posibles rectas paralelas, dado que no se construyeron como paralelas mencionan que tendrían que medir su equidistancia para estar seguros.	Recta **infinita** [P]. Recta **extensible** [P]. Recta **como referencia de una equidistancia** [P]. Recta **como parte de una relación** (paralelismo) [P]. **Relación entre rectas – paralelismo [P]**.
		En sus HT, los tres miembros describen que tienen las rectas que se intersecan y las que no lo hacen. Al igual que el equipo B, una profesora, la CPa3, construyó rectas paralelas y los otros dos miembros	Analizando sus construcciones reconocen rectas que se intersecan y rectas que no lo hacen.	Recta **infinita** [P]. Recta **extensible** [P]. **Relación entre rectas – oblicuidad [P]**.

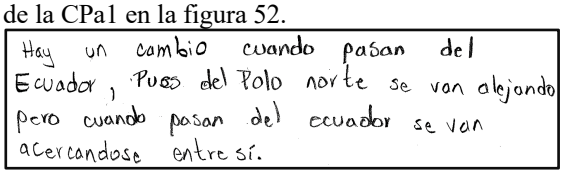
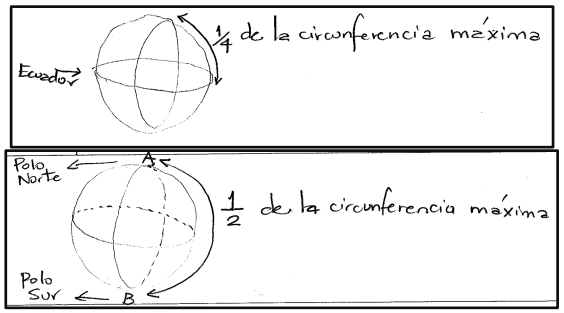
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Diferencian pares de rectas, las que se intersecan y las que no.	del equipo, rectas oblicuas; por ejemplo, la construcción de la CPa1 se muestra en la figura 49.  Figura 49. Construcción de dos rectas planas por CPa1. Fuente: HT.		**Relación entre rectas – paralelismo [P]**. Recta **como parte de una relación** (paralelismo y oblicuidad) [P].
	Relacionan rectas a través de la intersección. Reconocen que dos rectas que se intersecan solo pueden hacerlo en un punto.	V-APa1-S2|0:10:51-0:15:30|: "Bueno, llegamos a la conclusión que mis dos compañeros, que dibujaron rectas oblicuas, que son oblicuas, que se intersecan y no tienen más forma de relacionarse, y las mías no se intersecan", según el investigador-observador esta intersección se entiende como la forma de relacionarse (ver figura 30).  III. **Notas sobre el conocimiento matemático:** Observaciones de la población participante sobre aspectos puntuales del conocimiento matemático involucrado en la situación. Nota1: •Una relación entre rectas que los estudiantes manifiestan que se conserva es la intersección entre rectas. (Del plano a la esfera) Figura 30. Nota de investigador-observador sobre la intersección de rectas. Fuente: NIO.	Trazando rectas oblicuas reconocen que la única forma de relacionar esas rectas es a través de su intersección. Separando esas rectas oblicuas de las paralelas.	**Relación entre rectas – paralelismo/oblicuidad [P]**. Recta **como parte de una relación** (paralelismo y oblicuidad) [P].
		En sus hojas de trabajo, la BPa3 menciona que se relacionan por la no intersección o por la intersección en un punto [generalización euclidiana] (ver figura 43).  No se intersecan. Se pueden intersecan en un punto. Figura 43. Respuesta a la T1 por BPa3. Fuente: HT.	Además, reconocen que en el plano las rectas que se intersecan solo pueden hacerlo en un punto.	Dos **rectas no paralelas se intersecan en uno y solo un punto** (existencia y unicidad del punto de intercpeción entre rectas no paralelas) [P].
	Reconocen rectas perpendiculares. Reconocen rectas en distintos planos, las rectas alabeadas. Trazan una de las relaciones de rectas planas en la esfera.	Al preguntar si tenemos algunas rectas oblicuas especiales, todos responden que las perpendiculares. Sin embargo, el V-AP3-S2|0:14:18-0:01:13|: "Tengo una consulta con lo de las rectas, y cuando son alabeadas [rectas que están en planos distintos]". El IP hace la aclaración de que estamos trabajando en el mismo plano. En la DG, al preguntar si podemos tener rectas perpendiculares, el equipo menciona que ellos dibujaron dos rectas perpendiculares (ver figura 44).  Figura 44. Construcción de rectas en la esfera por el equipo B. Fuente: Fotografía-sesión 2.	Entre las rectas oblicuas reconocen las rectas perpendiculares. Además, esa clasificación les lleva a pensar en rectas que se encuentran en distintos planos, las rectas alabeadas. Trasladan la relación de perpendicularidad a la esfera, trazando dos rectas esféricas perpendiculares.	**Relación entre rectas – oblicuidad/perpendicularidad/alabealidad [P]**. Recta **como parte de una relación** (oblicuidad, perpendicularidad y alabealidad) [P]. **Relación entre rectas – perpendicularidad [E]**. Recta **como parte de una relación** (perpendicularidad) [E].
	Trasladan el paralelismo a la esfera.	V-APa1-S2|0:13:17-0:13:20|: "Podemos tener circunferencias paralelas", señala circunferencias paralelas al ecuador (ver figura 33). El V-AP3-S2|0:13:38-0:13:45|: "Según lo que sé de geografía,	Inicialmente creen que se pueden tener todas las relaciones de rectas planas en la esfera, por ello intentan	**Relación entre rectas – paralelismo [P]**.

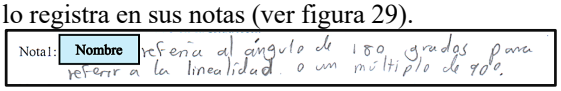
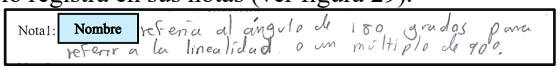
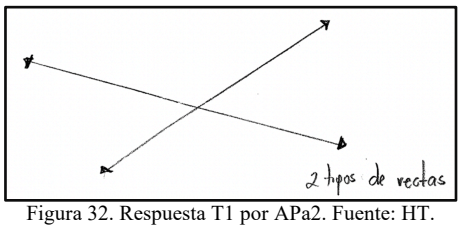
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Comparan su construcción con nociones geográficas. Relacionan paralelos con paralelas. Identifican circunferencias paralelas a la circunferencia máxima.	sí, porque están los meridianos y los paralelos, o sea que si son paralelos son paralelas". Estos cuestiomientos también son señalados por el investigador-observador (ver figura 34). Figura 33. APa1 señala circunferencias paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.  Figura 34. Nota de investigador-observador sobre rectas paralelas en la esfera. Fuente: NIO.	probar el paralelismo en la esfera. Señalan circunferencias paralelas a la circunferencia máxima y relacionan esas ideas geométricas con nociones de geografía, la existencias de los paralelos les hace afirmar que deben existir las rectas paralelas en la esfera.	Recta **como una circunferencia máxima** [E].
		Ante la analogía que hace el AP3 sobre que los paralelos son rectas paralelas al ecuador, la V-CPa1-S2|0:13:46-0:09:48|: "Sí, tiene razón". El V-CP2-S2|0:14:00-0:14:07|: "Si nosotros tenemos una recta y tenemos otra recta por acá [señala en una hoja esférica la posibilidad de dos rectas paralelas (ver figura 50)]". El IP pregunta si esa otra recta que señala [el paralelo al ecuador] es una línea recta en la esfera. El V-CP2-S2|0:14:15-0:14:17|: "Sería una circunferencia". El IP pregunta si sería una circunferencia máxima, y el V-CP2-S2|0:14:20-0:14:20|: "No". Figura 50. El CP2 señala posibles rectas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.	Exponen que deben existir rectas paralelas por la existencia de los paralelos en geografía. Toman una hoja esfera y señalan circunferencias paralelas a su borde, es decir que reconocen que el borde la hoja esférica es una recta esférica. Reconocen que esas son circunferencias paralelas al ecuador pero no serían circunferencias máximas es decir, que no serían rectas esféricas.	Recta como **eje de simetría** [E]. Recta como **divisor de la superficie** [E]. **Recta como referencia para la construcción de circunferencias paralelas** [E].
	Procuran mostrar circunferencias paralelas a la circunferencia máxima, tensando la cuerda y colocando la regla esférica no superpuesta en la superficie.	Para verificar la existencia de paralelas en la esfera, la APa1 solicita hilo e intenta tensar el hilo en una circunferencia menor, paralela al ecuador (ver figura 35), y menciona V-APa1-S2|0:17:38-0:17:38|: "Se va [es decir, el hilo se desliza]". Mueve la circunferencia hasta llegar al ecuador, logra tensar el hilo, dice V-APa1-S2|0:17:53-0:18:20|: "Esta es la máxima, parece que no, no queda el hilo tenso". Además, agrega V-APa1-S2|0:19:24-0:17:38|: "Que la tensión de la cuerda depende de qué tan alejado o cercano esté del ecuador".	Prueban la existencia de las paralelas en la esfera. Para ello, procuran tensar la cuerda en circunferencias menores, observan que la cuerda se desliza hacia el polo, van acercando las circunferencias al ecuador y notan que la tensión cambia, logrando la cuerda totalmente tensa en la circunferencia máxima.	Recta **desde la tensión de una cuerda** [E]. Recta **como circunferencia máxima** [E]. Recta **como prototipo** (cuerda tensa) [E].

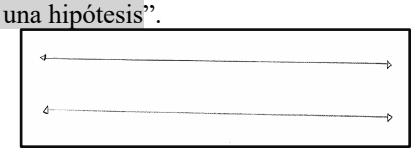
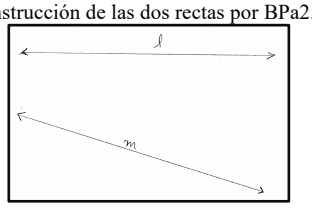
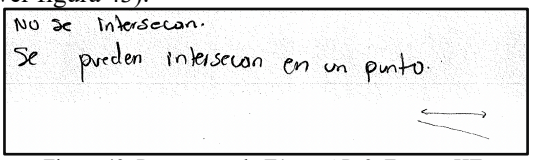
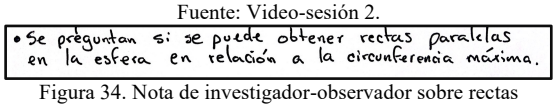
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Notan que el hilo en circunferencias paralelas se desliza hacia el polo. Trasladan las paralelas acercándose a la recta. Observan y reconocen que a medida que la circunferencia se acerca a la circunferencia máxima es más fácil tensar la cuerda (la tensión de la cuerda cambia). Reconocen que el hilo se puede tensar solo en la circunferencia máxima. Caracterizan a los paralelos diferentes al ecuador como circunferencias esféricas. Reconocen que en la esfera todas las circunferencias se van a intersecar.	 Figura 35. APa1 intentar construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2. Las profesoras APa1 y APa2 toman la regla esférica e intentan colocarla paralela al ecuador (ver figura 36). En la DG, al preguntar si podemos tener rectas perpendiculares, el V-AP3-S2|0:21:07-0:21:07|: "Sí".  Figura 36. APa1 y APa2 intentan construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2. Al probar con el hilo tenso, el V-CP2-S2|0:17:43-0:14:07|: "Siempre todas las circunferencias se van a tocar". Cuando el IP pregunta si se mantienen las relaciones en la esfera, V-CPa3-S2|0:20:47-0:20:47|: "No". Luego el IP pregunta cuáles se mantienen; el equipo completo responde que las que se intersecan. Después de la pregunta del AP3 sobre los paralelos y las paralelas, y la pregunta del IP sobre qué serían los paralelos que no son el ecuador, V-CPa1-S2|0:23:50-0:09:48|: "Circunferencias en la esfera".	Usando la regla esférica intentan mostrar circunferencias paralelas pero notan que la regla solo se sobrepone en la superficie de la esfera en el ecuador. En cambio la relación de perpendicularidad la aceptan sin necesidad de probarlo. En las pruebas de la cuerda tensa reconocen que todas las circunferencias máximas se van a intersecar por lo que la relación de paralelismo no se da en la esfera. De ahí, concluyen que los paralelos que no son el ecuador serán circunferencias en la esfera.	La **inexistencia del paralelimos** [E]. Recta **como prototipo** (regla esférica). **Relación entre rectas – perpendicularidad [E]**. Recta **desde la tensión de una cuerda** [E]. La **inexistencia del paralelismo** [E].
	Marcan dos meridianos en el globo terráqueo. Establecen que todos los meridianos y antimeridianos son rectas	La profesora APa1 marca los meridianos en el globo terráqueo (ver figura 37).	Trazan dos meridianos en la esfera con lineas punteadas.	Recta como **parte de un sistema de referencia** (coordenadas geográficas).

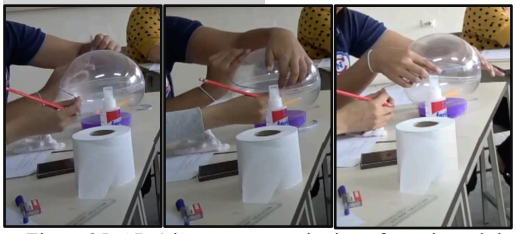
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	en la esfera y de los paralelos, solo el ecuador es recto.	 Figura 37. APa1 marca meridianos en el globo terráqueo. Fuente: Fotografía-sesión 2. Todos los equipos reconocen que todos los meridianos y antimeridianos son líneas rectas en el globo terráqueo (T3, T4), además de que de los paralelos solo el ecuador es línea recta esférica (T5, T6). El CP2 y la CPa1 marcan los dos meridianos (ver figura 51). Figura 51. CP2 y CPa1 marcan meridianos en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 2.	Reconocen que los meridianos y antimeridianos son rectas en la esfera, entre los paralelos, el ecuador es una recta. Trazan dos meridianos en la esfera con lineas punteadas.	**Recta geográfica** [E]. Recta como **parte de un sistema de referencia** (coordenadas geográficas) [E].
	Analizan el cambio en los arcos de los paralelos entre dos meridianos. Observan y reconocen que a medida se alejan del polo norte los arcos aumentan. Observan y reconocen que a medida se acercan al polo sur los arcos disminuyen. Identifican que en el ecuador se da el cambio de aumentar a disminuir. Exponen propiedades de los	V-APa1-S2|0:33:09-0:17:38|: "Vamos viendo que se va haciendo máximo; pareciera que en el ecuador que no está señalizado [lo señala con su mano, ver figura 38a], luego va disminuyendo de polo a polo. En el polo inicial va aumentando y después, al llegar al otro polo, va disminuyendo [marca el aumento y disminución con sus manos, ver figura 38b]". (T8) Cuando se presenta esta pregunta, V-APa1-S2|0:38:48-0:39:01|: "Se van acercando". Ante la pregunta de qué suceso ocurre entre los meridianos (T10), la V-APa1-S2|0:42:20-0:42:59|: "Guardan la distancia del polo norte al polo sur, la distancia del polo norte al ecuador es ¼, y luego cambia a esa distancia… El polo norte y el polo sur, ambos, son puntos de intersección". El IP menciona: "Sí, son puntos de intersección, son opuestos, entre ellos hay un cambio, pero ¿qué cambia?"; V-APa1-S2|0:43:25-0:42:59|: "Cuando llegamos a la circunferencia máxima, luego va a haber una disminución". El IP menciona, entonces, esta cambiando la amplitud de los arcos, de crecimientos a decrecimientos. 	Interpretan los arcos de círculo de los paralelos que hay entre dos meridianos, primero a medida que se alejan del polo norte, luego a medida que se acercan al polo sur. Reconocen que a medida que se alejan del polo norte esos arcos se van haciendo más grandes (aumentan de tamaño), hasta el ecuador; luego va desminuyendo hasta volver a intersecarse en el otro polo. Exponen la medida del polo norte al ecuador y del ecuador al polo sur, ¼ de ciercunferencia; además, la distancia entre los dos polos.	Rectas como **referencia para observar el comportamiento de arcos** [E]. Recta como **parte de un sistema de referencia** (coordenadas geográficas) [E]. Relación **entre rectas – divergencia/convergencia** [E]. Todas **las rectas se intersecan en dos puntos** [E]. Recta como el **límite de un comportamiento** [E]. Recta como el **cambio de un comportamiento** [E]. Recta como **unidad de medida** [E].

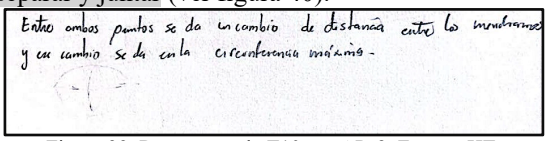
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	elementos involucrados (los polos son los puntos de intersección, en el ecuador se da el cambio, y la medida de los arcos aumenta y disminuyen). Caracterizan el comportamiento de los arcos de círculo (se separan y se juntan, se alejan y se acercan, es cambiante).	Figura 38a. APa1 señala el ecuador. Fuente: Fotografía-sesión 2. Figura 38b. APa1 marca el aumento y disminución de los arcos de círculo. Fuente: Fotografía-sesión 2. Por su parte, la APa2 en sus hojas de trabajo reconoce el cambio asociado a la distancia entre meridianos; además, reconoce que el cambio se da en el ecuador (ver figura 39). El AP3 señala el comportamiento de esas rectas con los verbos separar y juntar (ver figura 40).  Figura 39. Respuesta a la T10 por APa2. Fuente: HT.  Figura 40. Respuestas a la T10 por AP3. Fuente: HT.	Reconocen que la medida de los arcos de los paralelos está cambiando (están aumentando), sin embargo, en el ecuador dejan de aumentar e inician a decrecer hasta volver a intersecarse.	Rectas como **referencia para observar el comportamiento de arcos** [E]. Relación **entre rectas – divergencia/convergencia** [E]. Todas **las rectas se intersecan en dos puntos** [E]. Recta como el **límite de un comportamiento** [E]. Recta como el **cambio de un comportamiento** [E].
		V-BP1-S2|0:34:00-0:27:34|: "Tendremos que dibujar uno [refiere a dibujar un arco de círculo], ah, pero cómo lo dibujamos, uno cerca", se pone de acuerdo en dibujar un círculo cercano al polo. V-BPa3-S2|0:34:10-0:34:19|: "Pero el detalle está en que, si se fijan, cuando ya va más acá, se acercan". Entonces el V-BP1-S2|0:34:20-0:34:23|: "Sí, a medida se va acercando al polo, el arco es más pequeño [hace el proceso inverso al sugerido en la instrucción]". La V-BPa3-S2|0:34:50-0:34:19|: "Qué extraño verdad, algo sucede". (T9) Ante esta pregunta, el V-BP1-S2|0:39:30-0:39:31|: "Se tiene la separación más grande". El V-BP1-S2|0:45:04-0:45:10|: "No sé, no encuentro la palabra, o sea, lo que sucede es esto [señalando el cambio de longitud de los arcos]", V-BPa3-S2|0:45:38-0:44:23|: "Cambia el comportamiento de las rectas". En sus HT, el BP1 reconoce el cambio usando los términos alejarse y acercarse (ver figura 47).  Figura 47. Respuesta a la T10 por BP1. Fuente: HT.	Aunque aparecen trazados los paralelos, sienten la necesidad de remarcar uno como ejemplo, toman algunos casos particulares. Toman casos más cerca al polo sur y reconocen que los meridianos se acercan. Este comportamiento entre los meridianos les sorprende. Reconocen que en el ecuador se da la separación máxima. Señalando el cambio de longitud de los arcos de círculos reconocen que hay un cambio de comportamiento.	Rectas como **referencia para observar el comportamiento de arcos** [E]. Relación **entre rectas – divergencia/convergencia** [E]. Todas **las rectas se intersecan en dos puntos** [E]. Recta como el **límite de un comportamiento** [E]. Recta como el **cambio de un comportamiento** [E]. Relación **entre rectas – divergencia/convergencia** [E].
		V-CPa1-S2|0:35:09-0:35:10|: "Se van alejando", V-CP2-S2|0:35:11-0:35:17|: "Sí, en el ecuador es donde se encuentra el punto máximo [refiere al mayor arco]; en el ecuador es donde está la distancia máxima". (T10) La V-CPa3-S2|0:46:48-0:46:50|: "Aparte de que se intersecan, porque eso ya lo sabemos", V-CP2-S2|0:46:53-0:47:00|: "Se alejan hasta el ecuador, y se acercan", V-CPa3-S2|0:47:21-0:47:21|: "Qué sucede", V-CP2-S2|0:47:27-0:47:36|: "Se	Reconocen que en el ecuador se da la distancia máxima. Observando las interseccionesde las rectas, caracterizan el cambio de esas rectas, se alejan hasta el	Recta como el **límite de un comportamiento** [E]. Recta como el **cambio de un comportamiento** [E]. Rectas como **referencia para observar el comportamiento de arcos** [E].

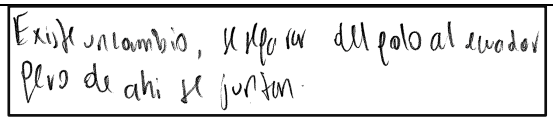
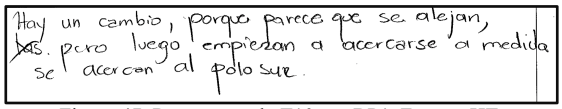
Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	expanden… es que tendría que haber un punto medio entre ambas porque el comportamiento es cambiante, hasta el ecuador". Cuando escucho al IP preguntar qué es lo que está cambiando, V-CP2-S2|0:48:26-0:48:27|: "La distancia entre las paralelas". El IP les pregunta qué sucede, V-CP2-S2|0:49:00-0:49:15|: "Se alejan y luego se acercan, independientemente cuál de los dos puntos consideremos, o bien se van a alejar y luego después de un cierto punto van a comenzar otra vez a acercarse". En sus HT también señala ese cambio, al igual que sus compañeras, por ejemplo, ver respuesta de la CPa1 en la figura 52.  Figura 52. Respuesta de la T10 por CPa1. Fuente: HT.	ecuador y vuelven a intersecarse. Reconocen que el comportamiento es cambiante, porque inicialmente van cambiando, aumentando, y luego pasan de aumentar a disminuir. Reconocen que no importa el polo que tomen inicialmente siempre se observa el comportamiento de aumentra a disminuir.	Relación **entre rectas – divergencia/convergencia** [E]. Todas **las rectas se intersecan en dos puntos** [E]. Recta como el **límite de un comportamiento** [E]. Recta como el **cambio de un comportamiento** [E].
Descomponen a la circunferencia máxima en cuartos y en medios, según en comportamiento de los arcos de círculo. Miden la distancia del polo al cambio de comportamiento y la distancia entre los dos polos. Atribuyen al cuarto y al medio de circunferencia máxima propiedades en el comportamiento de los meridianos y paralelos.	Toda la población participante está de acuerdo en que el cambio de comportamiento entre los dos meridianos será a ¼ de circunferencia máxima (T11) y que vuelven a intersecarse a ½ de circunferencia máxima o una semicircunferencia (T12). V-BP1-S2|0:45:52-0:46:15|: "¿A qué distancia se intersecan las dos rectas?, ¿a qué distancia? A la mitad, la mitad de una circunferencia máxima, porque esto de acá a acá es la mitad de una y esta es la mitad de la otra [señalando los meridianos]". En sus HT, presenta dos esquemas en los que señala la distancia que hay del polo norte al ecuador y del polo norte al polo sur (ver figura 48).  Figura 48. Respuesta a la T11 y T12 por el BP1. Fuente: HT.	Toman a la circunferencia máxima como referencia para medir la distancia del polo al ecuador y de polo a polo, reconociendo que el cambio de comportamiento se da a ¼ de circunferencia y las interseccionesse da a una semicirucnferencia máxima o ½ de circunferencia máxima.	Recta como **referencia de medida de segmentos** [E]. El **cuadrante o cuarto de circunferencia representa el cambio de comportamiento** [E]. La **semicircunferencia máxima representa las interseccionesde dos rectas** [E].
Ángulo plano y esférico			
Relacionan a la recta con el ángulo	Se le pregunta al AP3 por la caracterización de la recta que dio sobre el ángulo, V-AP3-S2|0:00:18-0:01:13|: "Sí, no sé si la recta, al estar así, forma un ángulo recto, la recta con el plano… No sé, lo asocié	Busca caracterizar la rectitud de la recta, por lo que asocia el nombre con el ángulo recto o un múltiplo de él. Logrando	Ángulo recto como **argumento para el nombre de un objeto geométrico** [P].

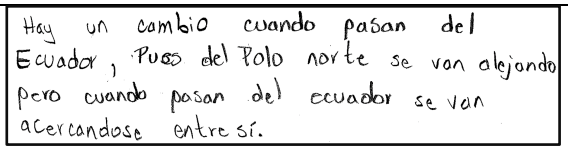
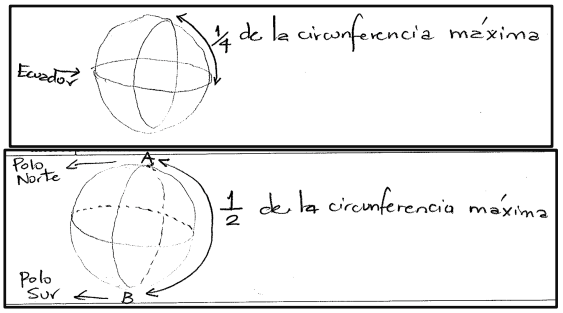
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	recto y el ángulo llano. Reconocen que en todos los puntos de la recta el ángulo de un lado al otro es de 180 grados.	con el ángulo en ese momento, no sé si tiene algo que ver la definición de línea recta con el ángulo recto". El IP muestra las dos palmas juntas y le dice que si una es el plano y la otra la recta, qué ángulo habría, V-AP3-S2|0:01:12-0:01:13|: "De 180, que es un múltiplo de 90, podría ser un ángulo de 90 por otro número" [idea asociada a la caracterización de recta de la sesión 1], esto también el investigador-profesor lo registra en sus notas (ver figura 29).  Figura 29. Nota de investigador-profesor sobre la linealidad según AP3. Fuente: NIP.	reconocer que en todos sus puntos el ángulo de un lado al otro es de 180 grados.	Ángulo como **propiedad de una recta** [P]. Ángulo **como cantidad** [P]. Ángulo **como cualidad** [P].
		Recta y segmento de recta plano y esférico		
En las actividades	Reconocer propiedades de la recta.	Se le pregunta al AP3 por la caracterización de la recta que dio sobre el ángulo, V-AP3-S2|0:00:18-0:01:13|: "Sí, no sé si la recta, al estar así, forma un ángulo recto, la recta con el plano… No sé, lo asocié con el ángulo en ese momento, no sé si tiene algo que ver la definición de línea recta con el ángulo recto". El IP muestra las dos palmas juntas y le dice que si una es el plano y la otra la recta, qué ángulo habría, V-AP3-S2|0:01:12-0:01:13|: "De 180, que es un múltiplo de 90, podría ser un ángulo de 90 por otro número" [idea asociada a la caracterización de recta de la sesión 1], esto también el investigador-profesor lo registra en sus notas (ver figura 29).  Figura 29. Nota de investigador-profesor sobre la linealidad según AP3. Fuente: NIP.	Relacionan a la recta con el ángulo recto y el ángulo llano, reconocen que en todos los puntos de la recta el ángulo de un lado al otro es de 180 grados; agregan símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud); nombran las rectas con letras minúsculas; exponen propiedades de las rectas (pueden prolongarse).	Recta **compuesta por puntos** [P]. Recta **desde el ángulo llano** (en todos sus puntos, si ese punto es el vértice, el ángulo entre los dos lados es siempre de 180 grados) [P]. **Recta infinita** [P]. **Recta extensible o prolongable** [P].
	Reconocer propiedades en la relación de dos rectas planas.	V-APa1-S2|0:10:51-0:15:30|: "Bueno, llegamos a la conclusión que mis dos compañeros, que dibujaron rectas oblicuas, que son oblicuas, que se intersecan y no tienen más forma de relacionarse, y las mías no se intersecan". Por su parte, la APa2 fue la única de todo el grupo de participantes que presenta en la construcción la intersección de dos rectas (ver figura 32).  Figura 32. Respuesta T1 por APa2. Fuente: HT.	Tranzan rectas oblicuas y paralelas; agregan símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud); nombran las rectas con letras minúsculas; exponen propiedades de las rectas (pueden prolongarse, las paralelas son equidistantes); diferencian una construcción geométrica de un bosquejo (lo presentan como hipótesis); relacionan rectas a través de la intersección; reconocen que dos rectas que se intersecan solo pueden hacerlo en un punto; reconocen rectas perpendiculares.	**Relación entre rectas – oblicuidad/paralelismo/ perpendicularidad** [P]. **Recta infinita** [P]. **Recta extensible** [P]. Todas **las rectas que se intersecan lo hacen en un punto** [P].
	Clasificar las relaciones de dos rectas planas.	Al preguntar si tenemos algunas rectas oblicuas especiales, todos responden que las perpendiculares. Sin embargo, el V-AP3-S2|0:14:18-0:01:13|: "Tengo una consulta con lo de las rectas, y cuando son alabeadas [rectas que están en planos distintos]". El IP hace la aclaración de que estamos trabajando en el mismo plano.	Tranzan rectas oblicuas y paralelas; agregan símbolos a sus representaciones (flechas para indicar su infinitud); nombran las rectas con letras	**Relación entre rectas – oblicuidad/paralelismo/ perpendicularidad/alea bilidad** [P]. **Recta infinita** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		El V-BP1-S2|0:09:02-0:09:08|: "Bueno [menciona el nombre de la BPa2], hizo paralelas, pero yo no; se parece a la suya, pero igual está más inclinada". La construcción de la BPa2 se presenta en la figura 41 y la construcción del BP1 en la figura 42, la V-BPa3-S2|0:09:17-0:09:20|: "Creo que cuando usted siga [refiere a que si continúa la recta], van a intersecarse en un punto, mientras que las de [menciona el nombre de la BPa2] no", el V-BP1-S2|0:09:24-0:09:26|: "Depende, parecen paralelas", la V-BPa2-S2|0:09:27-0:09:36|: "Parecen paralelas, pero no sabemos, hay que medir si en todos los puntos son equidistantes", la V-BPa3-S2|0:09:37-0:09:20|: "Es como una hipótesis".  Figura 41. Construcción de las dos rectas por BPa2. Fuente: HT.  Figura 42. Construcción de las dos rectas por BP. Fuente: HT. En sus hojas de trabajo, la APa3 menciona que se relacionan por la no intersección o por la intersección en un punto [generalización euclidiana] (ver figura 43).  Figura 43. Respuesta a la T1 por APa3. Fuente: HT.	minúsculas; exponen propiedades de las rectas (pueden prolongarse, las paralelas son equidistantes); diferencian una construcción geométrica de un bosquejo (lo presentan como hipótesis); relacionan rectas a través de la intersección; reconocen rectas perpendiculares; reconocen rectas en distintos planos, las rectas alabeadas; diferencian pares de rectas, las que se intersecan y las que no.	**Recta extensible** [P]. Todas **las rectas que se intersecan lo hacen en un punto** [P]. **Las rectas que no se intersecan son equidistantes** [P].
	Asentir la inexistencia del paralelismo en la esfera.	V-APa1-S2|0:13:17-0:13:20|: "Podemos tener circunferencias paralelas", señala circunferencias paralelas al ecuador (ver figura 33). El V-AP3-S2|0:13:38-0:13:45|: "Según lo que sé de geografía, sí, porque están los meridianos y los paralelos, o sea que si son paralelos son paralelas". Estos cuestiomientos también son señalados por el investigador-observador (ver figura 34). Figura 33. APa1 señala circunferencias paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2.  Figura 34. Nota de investigador-observador sobre rectas paralelas en la esfera. Fuente: NIO.	Trazan una de las relaciones de rectas planas en la esfera; trasladan el paralelismo a la esfera; comparan su construcción con nociones geográficas; relacionan paralelos con paralelas; identifican circunferencias paralelas a la circunferencia máxima; procuran mostrar circunferencias paralelas a la circunferencia máxima, tensando la cuerda y colocando la regla esférica no superpuesta en la superficie; notan que el hilo en circunferencias paralelas se desliza hacia el polo; trasladan las paralelas acercándose a la recta;	**Relaciones entre rectas – perpendicuaridad/ oblicuidad** [E] Recta como **parte de un sistema de referencia** (coordenadas geográficas) [E]. Recta **como circunferencia máxima** [E]. Recta como **referencia de paralelismo de circunferencias esféricas** [E]. Recta desde la **tensión de una cuerda** [E]. **Inexistencia de paralelismo** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Ante la analogía que hace el AP3 sobre que los paralelos son rectas paralelas al ecuador, la V-CPa1-S2|0:13:46-0:09:48|: "Sí, tiene razón". El V-CP2-S2|0:14:00-0:14:07|: "Si nosotros tenemos una recta y tenemos otra recta por acá [señala en una hoja esférica la posibilidad de dos rectas paralelas (ver figura 50)]". El IP pregunta si esa otra recta que señala [el paralelo al ecuador] es una línea recta en la esfera. El V-CP2-S2|0:14:15-0:14:17|: "Sería una circunferencia". El IP pregunta si sería una circunferencia máxima, y el V-CP2-S2|0:14:20-0:14:20|: "No". Figura 50. El CP2 señala posibles rectas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2. Para verificar la existencia de paralelas en la esfera, la APa1 solicita hilo e intenta tensar el hilo en una circunferencia menor, paralela al ecuador (ver figura 35), y menciona V-APa1-S2|0:17:38-0:17:38|: "Se va [es decir, el hilo se desliza]". Mueve la circunferencia hasta llegar al ecuador, logra tensar el hilo, dice V-APa1-S2|0:17:53-0:18:20|: "Esta es la máxima, parece que no, no queda el hilo tenso". Además, agrega V-APa1-S2|0:19:24-0:17:38|: "Que la tensión de la cuerda depende de qué tan alejado o cercano esté del ecuador".  Figura 35. APa1 intentar construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2. Las profesoras APa1 y APa2 toman la regla esférica e intentan colocarla paralela al ecuador (ver figura 36). En la DG, al preguntar si podemos tener rectas perpendiculares, el V-AP3-S2|0:21:07-0:21:07|: "Sí". 	observan y reconocen que a medida que la circunferencia se acerca a la circunferencia máxima es más fácil tensar la cuerda (la tensión de la cuerda cambia); reconocen que el hilo se puede tensar solo en la circunferencia máxima; caracterizan a los paralelos diferentes al ecuador como circunferencias esféricas; reconocen que en la esfera todas las circunferencias se van a intersecar.	Todas las **rectas se intersecan en dos puntos** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Reconocer propiedades en la relación de dos rectas esféricas.	Figura 36. APa1 y APa2 intentan construir circunferencias máximas paralelas al ecuador. Fuente: Video-sesión 2. Al probar con el hilo tenso, el V-CP2-S2|0:17:43-0:14:07|: "Siempre todas las circunferencias se van a tocar". Cuando el IP pregunta si se mantienen las relaciones en la esfera, V-CPa3-S2|0:20:47-0:20:47|: "No". Luego el IP pregunta cuáles se mantienen; el equipo completo responde que las que se intersecan. Después de la pregunta del AP3 sobre los paralelos y las paralelas, y la pregunta del IP sobre qué serían los paralelos que no son el ecuador, V-CPa1-S2|0:23:50-0:09:48|: "Circunferencias en la esfera". V-APa1-S2|0:33:09-0:17:38|: "Vamos viendo que se va haciendo máximo; pareciera que en el ecuador que no está señalizado [lo señala con su mano, ver figura 38a], luego va disminuyendo de polo a polo. En el polo inicial va aumentando y después, al llegar al otro polo, va disminuyendo [marca el aumento y disminución con sus manos, ver figura 38b]". (T8) Cuando se presenta esta pregunta, V-APa1-S2|0:38:48-0:39:01|: "Se van acercando". Ante la pregunta de qué suceso ocurre entre los meridianos (T10), la V-APa1-S2|0:42:20-0:42:59|: "Guardan la distancia del polo norte al polo sur, la distancia del polo norte al ecuador es ¼, y luego cambia a esa distancia… El polo norte y el polo sur, ambos, son puntos de intersección". El IP menciona: "Sí, son puntos de intersección, son opuestos, entre ellos hay un cambio, pero ¿qué cambia?"; V-APa1-S2|0:43:25-0:42:59|: "Cuando llegamos a la circunferencia máxima, luego va a haber una disminución". El IP menciona, entonces, esta cambiando la amplitud de los arcos, de crecimientos a decrecimientos. Figura 38a. APa1 señala el ecuador. Fuente: Fotografía-sesión 2. Figura 38b. APa1 marca el aumento y disminución de los arcos de círculo. Fuente: Fotografía-sesión 2. Por su parte, la APa2 en sus hojas de trabajo reconoce el cambio asociado a la distancia entre meridianos; además, reconoce que el cambio se da en el ecuador (ver figura 39). El AP3 señala el comportamiento de esas rectas con los verbos separar y juntar (ver figura 40).  Figura 39. Respuesta a la T10 por APa2. Fuente: HT.	Marcan dos meridianos en el globo terráqueo; establecen que todos los meridianos y antimeridianos son rectas en la esfera y de los paralelos, solo el ecuador es recta; señalan los círculos que tienen como centro el polo norte y el polo sur; reconocen esos círculos como paralelos; analizan el cambio en los arcos de los paralelos entre dos meridianos; observan y reconocen que a medida se alejan del polo norte los arcos aumentan; observan y reconocen que a medida se acercan al polo sur los arcos disminuyen; identifican que en el ecuador se da el cambio de aumentar a disminuir; exponen propiedades de los elementos involucrados (los polos son los puntos de intersección, en el ecuador se da el cambio, y la medida de los arcos aumenta y disminuyen); caracterizan el comportamiento de los arcos de círculo (se separan y se juntan, se alejan y se acercan, es cambiante); descomponen a la circunferencia máxima en cuartos y en medios, según en comportamiento de los arcos de círculo; miden la distancia del polo al cambio de comportamiento y la distancia entre los dos polos; atribuyen al cuarto y al medio de circunferencia máxima propiedades en el	Recta como **parte de un sistema de referencia** (coordenadas geográficas) [E]. Recta como **referencia de paralelismo de circunferencias esféricas** [E]. Rectas como **referencia para observar el comportamiento de arcos** [E]. Relación **entre rectas – divergencia/convergencia** [E]. Todas **las rectas se intersecan en dos puntos** [E]. Recta como el **límite de un comportamiento** [E]. Recta como el **cambio de un comportamiento** [E]. Recta como **unidad de medida** [E]. Recta divisible [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		 Figura 40. Respuestas a la T10 por AP3. Fuente: HT. V-BP1-S2|0:34:00-0:27:34|: "Tendremos que dibujar uno [refiere a dibujar un arco de círculo], ah, pero cómo lo dibujamos, uno cerca", se pone de acuerdo en dibujar un círculo cercano al polo. V-BPa3-S2|0:34:10-0:34:19|: "Pero el detalle está en que, si se fijan, cuando ya va más acá, se acercan". Entonces el V-BP1-S2|0:34:20-0:34:23|: "Sí, a medida se va acercando al polo, el arco es más pequeño [hace el proceso inverso al sugerido en la instrucción]". La V-BPa3-S2|0:34:50-0:34:19|: "Qué extraño verdad, algo sucede". (T9) Ante esta pregunta, el V-BP1-S2|0:39:30-0:39:31|: "Se tiene la separación más grande". El V-BP1-S2|0:45:04-0:45:10|: "No sé, no encuentro la palabra, o sea, lo que sucede es esto [señalando el cambio de longitud de los arcos]", V-BPa3-S2|0:45:38-0:44:23|: "Cambia el comportamiento de las rectas". En sus HT, el BP1 reconoce el cambio usando los términos alejarse y acercarse (ver figura 47).  Figura 47. Respuesta a la T10 por BP1. Fuente: HT. V-CPa1-S2|0:35:09-0:35:10|: "Se van alejando", V-CP2-S2|0:35:11-0:35:17|: "Sí, en el ecuador es donde se encuentra el punto máximo [refiere al mayor arco]; en el ecuador es donde está la distancia máxima". (T10) La V-CPa3-S2|0:46:48-0:46:50|: "Aparte de que se intersecan, porque eso ya lo sabemos", V-CP2-S2|0:46:53-0:47:00|: "Se alejan hasta el ecuador, y se acercan", V-CPa3-S2|0:47:21-0:47:21|: "Qué sucede", V-CP2-S2|0:47:27-0:47:36|: "Se expanden… es que tendría que haber un punto medio entre ambas porque el comportamiento es cambiante, hasta el ecuador". Cuando escucho al IP preguntar qué es lo que está cambiando, V-CP2-S2|0:48:26-0:48:27|: "La distancia entre las paralelas". El IP les pregunta qué sucede, V-CP2-S2|0:49:00-0:49:15|: "Se alejan y luego se acercan, independientemente cuál de los dos puntos consideremos, o bien se van a alejar y luego después de un cierto punto van a comenzar otra vez a acercarse". En sus HT también señala ese cambio, al igual que sus compañeras, por ejemplo, ver respuesta de la CPa1 en la figura 52.	comportamiento de los meridianos y paralelos.	

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		 Figura 52. Respuesta de la T10 por CPa1. Fuente: HT. Toda la población participante está de acuerdo en que el cambio de comportamiento entre los dos meridianos será a ¼ de circunferencia máxima (T11) y que vuelven a intersecarse a ½ de circunferencia máxima o una semicircunferencia (T12). V-BP1-S2|0:45:52-0:46:15|: "¿A qué distancia se intersecan las dos rectas?, ¿a qué distancia? A la mitad, la mitad de una circunferencia máxima, porque esto de acá a acá es la mitad de una y esta es la mitad de la otra [señalando los meridianos]". En sus HT, presenta dos esquemas en los que señala la distancia que hay del polo norte al ecuador y del polo norte al polo sur (ver figura 48).  Figura 48. Respuesta a la T11 y T12 por el BP1. Fuente: HT.		
	Ángulo plano y esférico			

4. Parte IV. Un ángulo (3 tareas)

1. Construya un ángulo en una hoja de papel y descríbalo respondiendo las siguientes preguntas: ¿cómo se compone un ángulo?, ¿qué medimos cuando medimos ángulos?
2. En la construcción anterior de dos rectas esféricas ¿identifica ángulos?
3. Compare el ángulo en el plano y en la esfera a través de las siguientes preguntas: ¿qué características se mantienen y de qué manera se mantienen?, ¿qué características son diferentes? y ¿por qué considera que se dan estas diferencias?

Hipótesis didáctica:

Reconocerán (T1) el ángulo como la relación de dos rectas, segmentos o semirrectas que se intersecan en un punto y como una cantidad por la medida de su amplitud. Identificarán, en la construcción anterior, ocho ángulos (T2). En la comparación, (T3) reconocerán que tanto en el plano como en la esfera se mantienen los elementos que componen un ángulo y en ambos se mide la amplitud. La representación del ángulo esférico cambia como consecuencia de que las rectas cambian; además, en el plano, dos rectas construyen cuatro ángulos y en la esfera ocho.

Descripción general:

En la construcción de ángulos planos, se notó que el ángulo recto y el llano jugaron un papel importante. Concluyeron que el ángulo se compone de lados y vértice, que esos lados pueden ser segmentos, semirrectas y/o rectas, además de que del ángulo se mide la abertura. Identifican ángulos esféricos, describiendo que la forma del ángulo no cambia, pero que cuando dos rectas se intersecan en el plano forman cuatro ángulos, pero en la esfera forman ocho, esto porque en la esfera hay dos intersecciones y esto porque las superficies son diferentes, exponiendo estas diferencias en términos de la infinitud o finitud.

Descripción particular:

Equipo A:

(T1) En la DG, después de la caracterización de ángulo que presenta CPa1, la V-APa1-S2|1:06:21-1:06:22|: “Tenemos un lado inicial y un lado terminal”. En sus HT describe estos lados como referencias para medir la abertura del ángulo (ver figura 53).

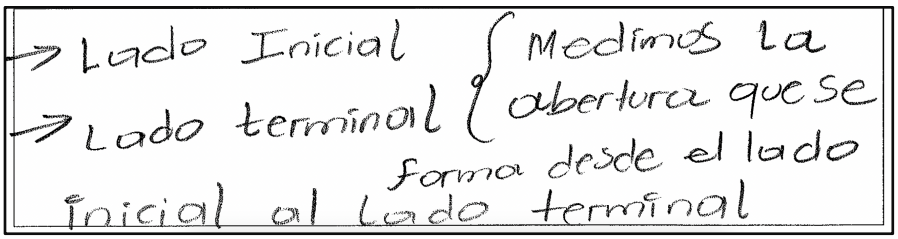


Figura 53. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT.

El V-AP3-S2|1:06:40-1:06:47|: “Yo puse dos semirrectas que forman una apertura que se interseca en un punto, llamado vértice”. En sus HT, la APa2 presenta un ángulo recto (ver figura 54). Sobre lo que medimos cuando medimos ángulos; todos parecen estar de acuerdo en que se mide la apertura o abertura.

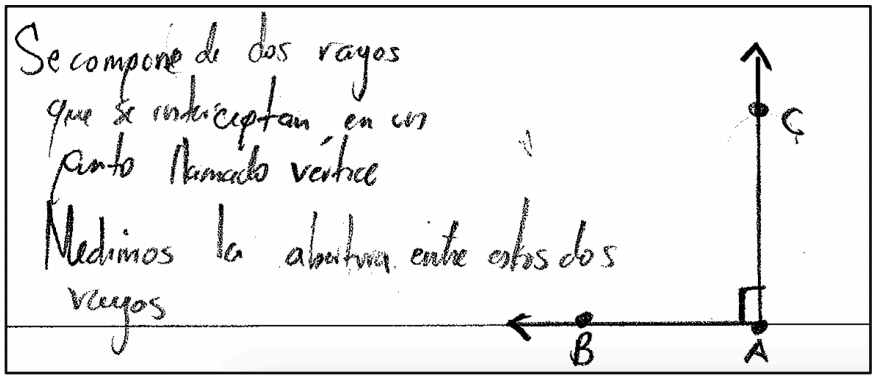


Figura 54. Respuesta de la T1 por APa2. Fuente: HT.

(T2) Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, el AP3 dice que cuatro, pero al escuchar las respuestas de CP2 y BP1, el V-AP3-S2|1:12:33-1:12:34|: “Cuatro en cada polo”.

(T3) El V-AP3-S2|1:18:29-1:18:29|: “Diferentes no las veo”, la V-APa1-S2|1:19:18-1:19:37|: “Yo tengo una pregunta, ¿aquí se van a formar ocho, que se ven? [el AP3 dice que sí], pero por qué en el plano solo se forman cuatro y aquí ocho, será porque en el plano es infinito y esta una esfera, que es una superficie finita”, V-APa2-S2|1:19:53-1:20:02|: “Sí, o sea aquí de cierta forma ya no se cortan, pero aquí sí se cortan, al cortarse forman cuatro”, V-APa1-S2|1:20:05-1:20:18|: “En el plano, en este punto de acá las rectas se tocan, verdad, pero en ningún punto otra vez se vuelven a tocar, porque el plano es infinito, por eso”, V-AP3-S2|1:20:19-1:20:23|: “Mi consulta es, pero los ángulos siempre serían los mismos”, V-APa1-S2|1:20:27-1:20:38|: “Tendríamos que probar eso, que este ángulo va con este ángulo dice usted, este de arriba con este de acá, habría que verificarlo [refiere a los ángulos opuestos por el vértice]”, V-AP3-S2|1:20:38-1:20:44|: “Son los mismos porque son opuestos por el vértice, son los mismos”. V-APa1-S2|1:23:00-1:23:05|: “Lo que usted dice, usted sabe que, en el plano, ya se sabe que los ángulos opuestos son congruentes, entonces, aquí este va con este, pero estaba tomando medio la demostración de que este era congruente con este; eso quisiera saber [se refiere a los ángulos internos de la lúnula]”.

En la DG, después de escuchar las características que se mantienen por BP1, el V-AP3-S2|1:28:01-1:28:01|: “Se mantiene el vértice”. Después de que el CP2 menciona y explica que los ángulos internos de la

lúnula son congruentes, el V-AP3-S2|1:28:40-1:28:40|: “Esa era mi duda”. Después de la nueva explicación del CP2, el V-AP3-S2|1:29:00-1:29:05|: “Esa era mi duda, entonces solo serían cuatro ángulos, porque serían los mismos”, el IP aclara que serían ángulos con la misma medida, el CP2 dice que serían diferentes ángulos, el V-AP3-S2|1:29:14-1:29:26|: “Sí, no, porque si trazas toda la circunferencia se van a formar los mismos”, el CP2 dice que no, porque tendrían distintos vértices, el V-AP3-S2|1:29:20-1:29:05|: “Oh ya, por los polos opuestos decís vos [el CP2 menciona que por los vértices], … Sí”. Esta discusión se ve reflejada en la respuesta que presenta en sus HT, porque entre los elementos que se mantienen habla de la abertura y de los vértices (ver figura 55). El IP utiliza la transparencia de la esfera para sobreponer los ángulos internos de lúnulas y explicar que sus ángulos internos son iguales.

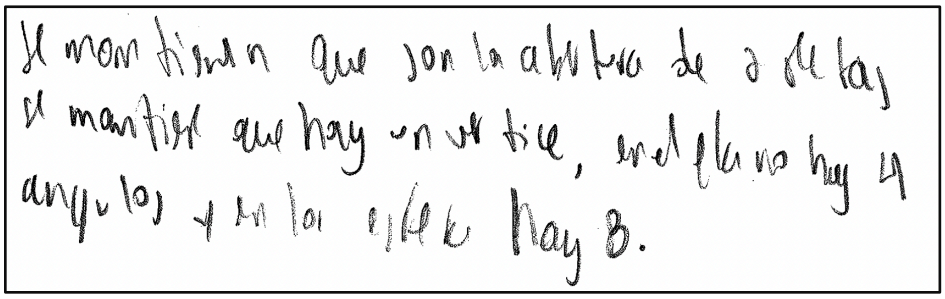


Figura 55. Respuesta de la T3 por AP3. Fuente: HT.

Al preguntar por qué se da esa diferencia, V-APa1-S2|1:30:04-1:30:22|: “Yo creo que por lo que usted decía, como el plano se extiende de forma infinita, entonces solo se van a intersecar una vez, pero acá es una sola parte, o sea, una superficie finita, entonces, por esa manera se intersecarían en las dos”.

Equipo B:

(T1) En la DG, al discutir sobre los lados del ángulo y la caracterización que dio la CPa1, V-BP1-S2|1:06:34-1:06:34|: “Segmentos [es decir, que los lados también pueden ser segmentos]”. Además, agrega V-BP1-S2|1:06:55-1:07:09|: “Bueno, el complemento de lo que dijo la compañera [menciona el nombre de APa1] sería la dirección, porque puede haber dos direcciones cuando se mide el ángulo”. El IP pregunta si cambia la medida si se mide de lado al otro y luego viceversa; V-BP1-S2|1:07:22-1:07:24|: “Sí, porque sería el complemento [refiere al otro ángulo que se forma con el resto del plano (ver figura 56)]”.

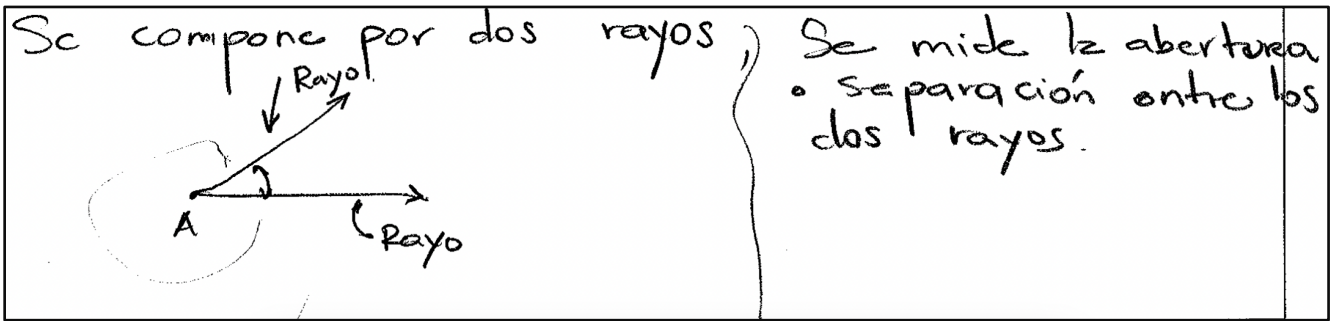


Figura 56. Respuesta de la T1 por BP1. Fuente: HT.

En sus HT, la BPa3 representa el ángulo que se muestra en la figura 57. En la representación no marca el ángulo como un ángulo recto, pero en la discusión, cuando se presenta el ángulo de APa2, ella menciona que también dibujó un ángulo recto.

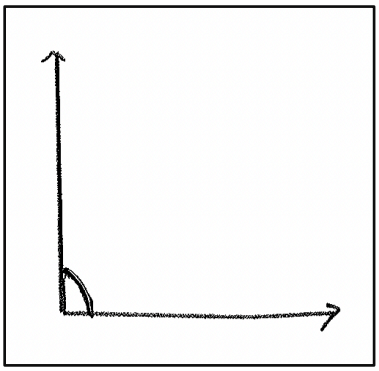


Figura 57. Representación del ángulo plano por BPa3. Fuente: HT.

Al preguntar con qué unidades de medida se miden los ángulos, exponen los grados y los radianes. El IP pregunta si podemos tener otra unidad de medida, V-BP1-S2|1:11:44-1:11:50|: "Con la división de un círculo en las partes que se consideren".

(T2) Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, después de escuchar la respuesta del CP2, el V-BP1-S2|1:12:30-1:12:31|: "Ocho, no".

(T3) En la DE, V-BPa3-S2|1:15:04-1:15:05|: "Los mismos ángulos que el plano", V-BPa2-S2|1:16:25-1:16:26|: "En la esfera se forman ocho", entonces la V-BPa3-S2|1:16:27-1:16:28|: "Ah, pero si usted sigue [si se continúa el segmento de recta]". El V-BP1-S2|1:16:28-1:16:35|: "Se da porque creo que si las dos rectas se intersecan en dos puntos y no solo en uno, y en el plano solo en uno". La V-BPa3-S2|1:17:23-1:17:30|: "Yo puse que tenía cuatro ángulos en el polo norte y en el polo sur; en total son ocho ángulos y se mantienen los ángulos [refiere a que se mantiene la forma de los ángulos]". En sus HT, además agrega la representación de un ángulo recto (ver figura 58), el V-BP1-S2|1:17:37-1:17:35|: "Lo mismo, pero y el porqué", la V-BPa3-S2|1:17:46-1:17:51|: "La esfera está en la tercera dimensión y la recta está en el plano", el V-BP1-S2|1:17:52-1:18:08|: "Yo le puse porque en la esfera hay dos puntos de intersección…, pero en el plano no".

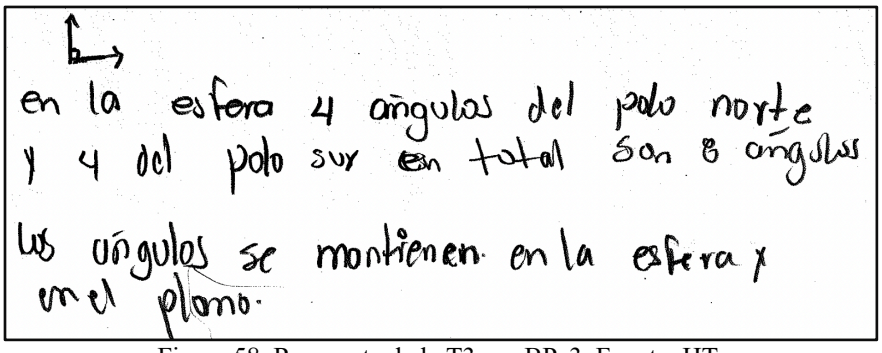


Figura 58. Respuesta de la T3 por BPa3. Fuente: HT.

En la DG, el V-BP1-S2|1:27:36-1:27:45|: “De las que se mantienen, solo pusimos que forman, tanto en el plano como en la esfera, se forman ángulos al intersectarse dos rectas”. Después de escuchar la justificación de las diferencias por APa1, el V-BP1-S2|1:30:25-1:30:41|: “Complementando lo que dice ella, nosotros pusimos que en el plano solo notamos que hay una intersección, sin embargo, acá hay dos; sería en los polos, entonces creo que por ahí va la idea”. El IP pregunta por qué hay dos interseccionesacá, pero no tienen respuesta.

Equipo C:

(T1) Ante las preguntas, el V-CP2-S2|1:05:10-1:05:12|: “La distancia de la abertura”. Sin pasar a las otras tareas, en el equipo buscan ángulos sobre el globo terráqueo (ver figura 59). En la DG, ante la pregunta sobre la composición del ángulo, la V-CPa1-S2|1:06:12-1:06:17|: “Con dos rayos que se intersecan en un punto, llamado vértice”. Se les preguntó si se puede formar ángulo con rectas; todos respondieron que sí. Al preguntar cuántos ángulos se forman con dos rectas, el V-CP2-S2|1:08:08-1:08:08|: “Cuatro ángulos”. Al preguntar si podrían tener una recta y una semirrecta, el V-CP2-S2|1:08:27-1:08:28|: “Sí, se formarían tres”.

Figura 59. El equipo C reconoce ángulos en el globo terráqueo. Fuente: Video-sesión 2.

Se hace una discusión sobre si medimos la distancia del ángulo o la abertura. El IP pregunta cómo medimos distancias, el V-CP2-S2|1:10:00-1:10:01|: “En este caso con el transportador”. El IP pregunta, ¿pero estamos midiendo distancias? El V-CP2-S2|1:10:06-1:10:28|: "Eh, no”. El IP hace una explicación sobre la distancia que habría entre dos objetos que están en los lados de un ángulo y si estos objetos se alejan del vértice, la distancia aumentaría, pero el ángulo sería el mismo.

(T2) Al preguntar si identifican ángulos, todos mencionan que sí; al preguntar cuántos ángulos identifican, el V-CP2-S2|1:12:28-1:12:28|: “Cuatro ángulos”.

(T3) El V-CP2-S2|1:21:00-1:21:52|: “Hay dos rectas y se forman ángulos; aquí se forman otros cuatro ángulos, se duplican los ángulos, aunque tengan medidas diferentes, pero se duplican…, ahora me definen ocho ángulos…, en el plano me definen cuatro ángulos y en la esférica ocho ángulos”. La V-CPa1-S2|1:25:14-1:25:24|:

“Yo puse que mantenían que se intersecan los puntos”. En sus HT, la CPa3 justifica las diferencias al cambio de superficie (ver figura 60).

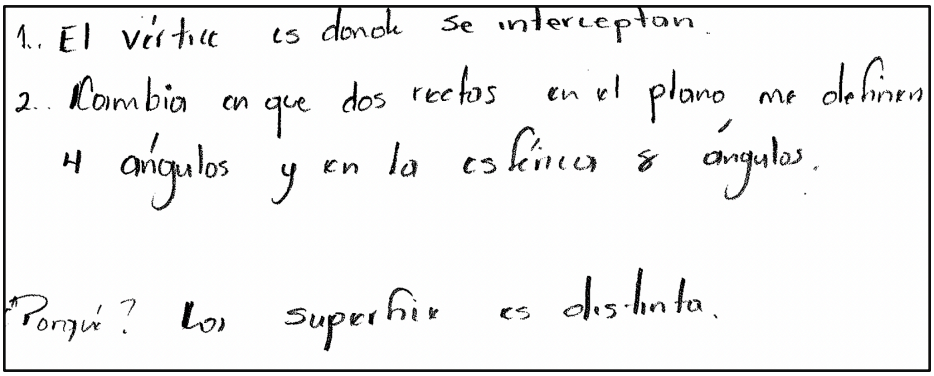


Figura 60. Respuesta de la T3 por CPa3. Fuente: HT.

En la DG, al discutir sobre las diferencias, V-CP2-S2|1:28:12-1:28:21|: “Que con la intersección de dos rectas en el plano me genera cuatro ángulos y, en cambio, en la parte esférica forma ocho ángulos, todos ellos congruentes, correspondientes y congruentes”. El IP preguntó cuáles son los ángulos congruentes, V-CP2-S2|1:28:32-1:28:38|: “Acá van a ser congruentes [señala los ángulos internos de una lúnula (ver figura 61)], por la misma abertura, igual que pasó con estos y estos [señala los ángulos internos de las otras lúnulas]”. Al pedirle que explique para todos, el V-CP2-S2|1:28:48-1:28:45|: “Si nosotros consideramos estos vértices, o bueno los polos, nosotros nos damos cuenta que, por ejemplo, estos dos de acá van a ser congruentes, por la misma abertura, y como de igual forma en esta y en esta [vuelve a señalar los ángulos internos de lúnulas]”. Cuando el AP3 menciona que serían cuatro ángulos porque al trazar toda la recta se forman los mismos ángulos, el V-CP2-S2|1:29:16-1:29:45|: “No, porque tendrían distintos vértices”. Cuando el IP pregunta, por qué hay dos interseccionesen la esfera, el V-CP2-S2|1:31:02-1:31:24|: “Porque en el plano las rectas son infinitas, se extienden de forma infinita, y en este cambio no. A cambio, son circunferencias, entonces estas circunferencias van a tener una cierta medida y justamente la intersección de estas medidas va a definir ángulos; cada una de las dos interseccionesson ángulos”.

Figura 61. El CP2 señala ángulos internos de una lúnula. Fuente: Video-sesión 2.

La CPa1, en sus HT, reconoce las diferencias entre superficies por la infinitud de una y la finitud de la otra (ver figura 62).

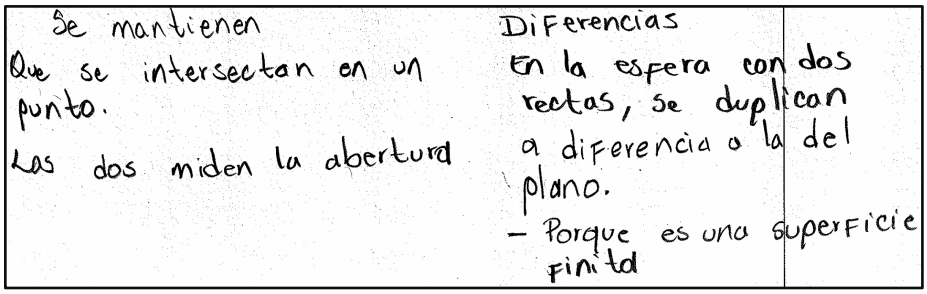
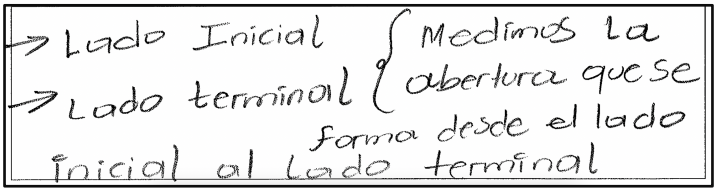
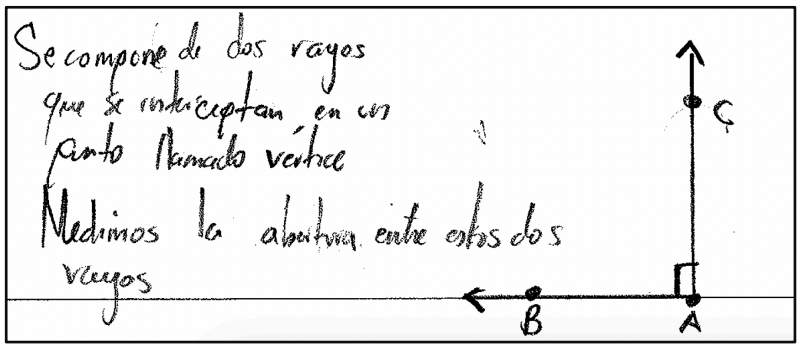
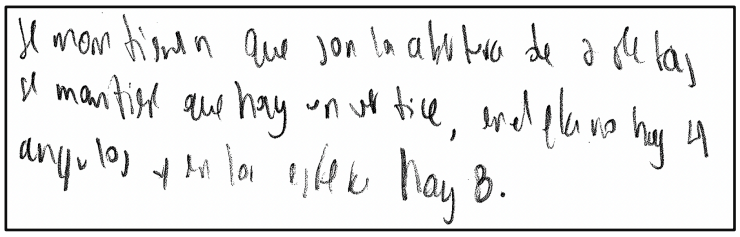
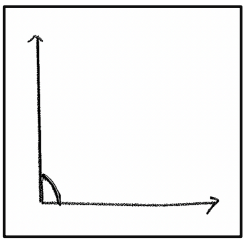


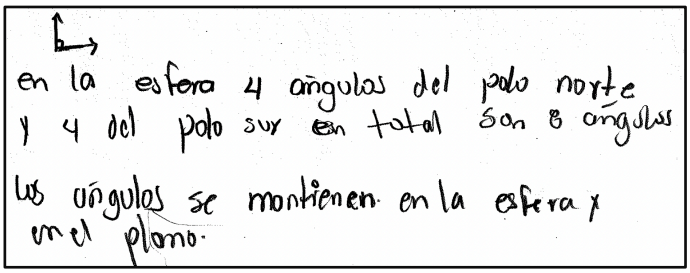
Figura 62. Respuesta de la T3 por CPa1. Fuente: HT.

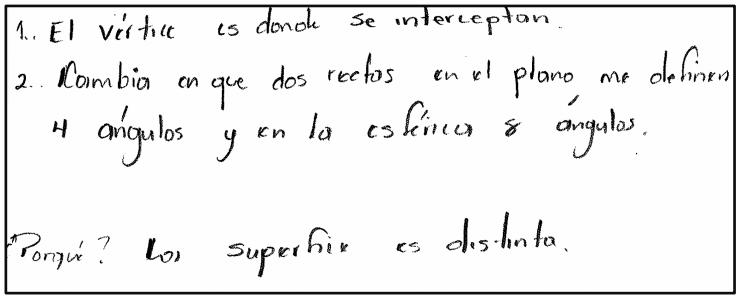
4-1 Análisis de prácticas (acciones y actividades): parte IV

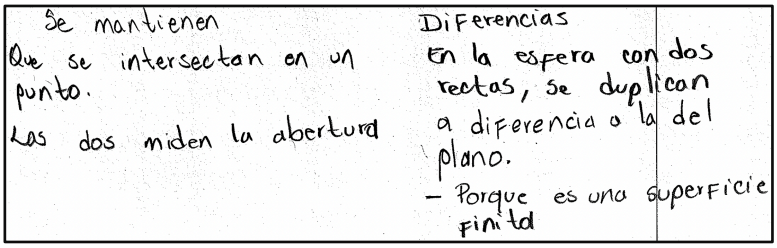
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Equipo A:		
(T1) En la DG, después de la caracterización de ángulo que presenta CPa1, la V-APa1-S2|1:06:21-1:06:22|: "Tenemos un lado inicial y un lado terminal". En sus HT describe estos lados como referencias para medir la abertura del ángulo (ver figura 53).  Figura 53. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT.	**Construyen** un ángulo plano. **Identifican** los lados del ángulo y los **nombran**. **Establecen** el lado inicial y terminal del ángulo para medir su abertura.	Analizando su construcción, identifican sus elementos y el papel que pueden tener en su medición.
El V-AP3-S2|1:06:40-1:06:47|: "Yo puse dos semirrectas que forman una apertura que se interseca en un punto, llamado vértice". En sus HT, la APa2 presenta un ángulo recto (ver figura 54). Sobre lo que medimos cuando medimos ángulos; todos parecen estar de acuerdo en que se mide la apertura o abertura.  Figura 54. Respuesta de la T1 por APa2. Fuente: HT.	**Identifican** los elementos del ángulo. **Señalan** la apertura del ángulo (la forma del ángulo). **Reconocen** que del ángulo se mide la abertura. **Construyen** un ángulo recto.	Analizando su construcción, identifican sus elementos y el papel que pueden tener en su medición.
(T2) Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, el AP3 dice que cuatro, pero al escuchar las respuestas de CP2 y BP1, el V-AP3-S2|1:12:33-1:12:34|: "Cuatro en cada polo".	**Reconocen** cuatro ángulos en cada una de las intersecciones.	**Identificando** ángulos en las dos intersecciones.
(T3) El V-AP3-S2|1:18:29-1:18:29|: "Diferentes no las veo", la V-APa1-S2|1:19:18-1:19:37|: "Yo tengo una pregunta, ¿aquí se van a formar ocho, que se ven? [el AP3 dice que sí], pero por qué en el plano solo se forman cuatro y aquí ocho, será porque en el plano es infinito y esta una esfera, que es una superficie finita", V-APa2-S2|1:19:53-1:20:02|: "Sí, o sea aquí de cierta forma ya no se cortan, pero aquí sí se cortan, al cortarse forman cuatro", V-APa1-S2|1:20:05-1:20:18|: "En el plano, en este punto de acá las rectas se tocan, verdad, pero en ningún punto otra vez se vuelven a tocar, porque el plano es infinito, por eso", V-AP3-S2|1:20:19-1:20:23|: "Mi consulta es, pero los ángulos	**Reconocen** que los ángulos en cuanto elementos y forma son iguales. **Cuestionan** la diferencia en la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera. **Justifican** la diferencia de	Analizando las construcciones en el plano y en la esfera. **Notan** que ambas representaciones tienen los mismos elementos. Pero la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera son diferentes, esto lo aluden a las superficies.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
siempre serían los mismos", V-APa1-S2|1:20:27-1:20:38|: "Tendríamos que probar eso, que este ángulo va con este ángulo dice usted, este de arriba con este de acá, habría que verificarlo [refiere a los ángulos opuestos por el vértice]", V-AP3-S2|1:20:38-1:20:44|: "Son los mismos porque son opuestos por el vértice, son los mismos". V-APa1-S2|1:23:00-1:23:05|: "Lo que usted dice, usted sabe que, en el plano, ya se sabe que los ángulos opuestos son congruentes, entonces, aquí este va con este, pero estaba tomando medio la demostración de que este era congruente con este; eso quisiera saber [se refiere a los ángulos internos de la lúnula]". En la DG, después de escuchar las características que se mantienen por BP1, el V-AP3-S2|1:28:01-1:28:01|: "Se mantiene el vértice". Después de que el CP2 menciona y explica que los ángulos internos de la lúnula son congruentes, el V-AP3-S2|1:28:40-1:28:40|: "Esa era mi duda". Después de la nueva explicación del CP2, el V-AP3-S2|1:29:00-1:29:05|: "Esa era mi duda, entonces solo serían cuatro ángulos, porque serían los mismos", el IP aclara que serían ángulos con la misma medida, el CP2 dice que serían diferentes ángulos, el V-AP3-S2|1:29:14-1:29:26|: "Sí, no, porque si trazas toda la circunferencia se van a formar los mismos", el CP2 dice que no, porque tendrían distintos vértices, el V-AP3-S2|1:29:20-1:29:05|: "Oh ya, por los polos opuestos decís vos [el CP2 menciona que por los vértices], … Sí". Esta discusión se ve reflejada en la respuesta que presenta en sus HT, porque entre los elementos que se mantienen habla de la abertura y de los vértices (ver figura 55). El IP utiliza la transparencia de la esfera para sobreponer los ángulos internos de lúnulas y explicar que sus ángulos internos son iguales.	ángulos por la infinitud del plano y la finitud de la esfera. **Identifican** ángulos opuestos por el vértice y **reconocen** que son congruentes. **Identifican** ángulos internos en un polígono de dos lados y los **reconocen** congruentes. **Identifican** cuatro ángulos en cada vértice. **Reconocen** que los cuatro ángulos de una intersección son congruentes correspondiente-mente con los ángulos de la otra intersección. **Reconocen** que los ángulos en cuanto elementos y forma son iguales. **Cuentan** la cantidad de ángulos que se forman con la intersección de dos rectas planas y las intercesiones de dos rectas esféricas. **Justifican** la diferencia en la cantidad de ángulos.	**Relacionando** ángulos **reconocen** ángulos opuestos por el vértice que **exponen** sus propiedades, son congruentes. **Cuestionando** los ángulos internos de un polígono de dos lados, intentando probar si son o no congruentes. Inicialmente piensan que son solo cuatro ángulos por ser congruentes, pero al reconocer que tienen vértices diferentes, los reconocen solo congruentes. Cuestionando la diferencia en la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera.
 Figura 55. Respuesta de la T3 por AP3. Fuente: HT. Al preguntar por qué se da esa diferencia, V-APa1-S2|1:30:04-1:30:22|: "Yo creo que por lo que usted decía, como el plano se extiende de forma infinita, entonces solo se van a intersecar una vez, pero acá es una sola parte, o sea, una superficie finita, entonces, por esa manera se intersecarían en las dos".		
Equipo B:		
(T1) En la DG, al discutir sobre los lados del ángulo y la caracterización que dio la CPa1, V-BP1-S2|1:06:34-1:06:34|: "Segmentos [es decir, que los lados también pueden ser segmentos]". Además, agrega V-BP1-S2|1:06:55-1:07:09|: "Bueno, el complemento	**Construyen** un ángulo plano. **Agregan** símbolos a su representación	Construyen un ángulo plano con dos semirrectas, identificando dos ángulos en su construcción, por lo

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
de lo que dijo la compañera [menciona el nombre de APa1] sería la dirección, porque puede haber dos direcciones cuando se mide el ángulo". El IP pregunta si cambia la medida si se mide de lado al otro y luego viceversa; V-BP1-S2|1:07:22-1:07:24|: "Sí, porque sería el complemento [refiere al otro ángulo que se forma con el resto del plano (ver figura 56)]".	para indicar la abertura del ángulo y como se mide esa abertura. **Exponen** que los lados puede ser semirrectas, rectas y segmentos. **Reconocen** que con dos semirrectas en el plano se forman dos ángulos.	que reconocen que es necesario marcar la dirección con la que se mediría el ángulo.
Figura 56. Respuesta de la T1 por BP1. Fuente: HT.		
En sus HT, la BPa3 representa el ángulo que se muestra en la figura 57. En la representación no marca el ángulo como un ángulo recto, pero en la discusión, cuando se presenta el ángulo de APa2, ella menciona que también dibujó un ángulo recto.	**Construyen** ángulos rectos. **Agregan** elementos a su construcción, como la dirección del ángulo, las flechas en las semirrectas.	En la discusión se menciona que el ángulo es recto, aunque no aparece el símbolo del ángulo recto.
 Figura 57. Representación del ángulo plano por BPa3. Fuente: HT.		
Al preguntar con qué unidades de medida se miden los ángulos, exponen los grados y los radianes. El IP pregunta si podemos tener otra unidad de medida, V-BP1-S2|1:11:44-1:11:50|: "Con la división de un círculo en las partes que se consideren". (T2) Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, después de escuchar la respuesta del CP2, el V-BP1-S2|1:12:30-1:12:31|: "Ocho, no". (T3) En la DE, V-BPa3-S2|1:15:04-1:15:05|: "Los mismos ángulos que el plano", V-BPa2-S2|1:16:25-1:16:26|: "En la esfera se forman ocho", entonces la V-BPa3-S2|1:16:27-1:16:28|: "Ah, pero si usted sigue [si se continúa el segmento de recta]". El V-BP1-S2|1:16:28-1:16:35|: "Se da porque creo que si las dos rectas se intersecan en dos puntos y no solo en uno, y en el plano solo en uno". La V-BPa3-S2|1:17:23-1:17:30|: "Yo puse que tenía cuatro ángulos en el polo norte y en el polo sur; en total son ocho ángulos y se mantienen los ángulos [refiere a que se mantiene la forma de los ángulos]". En sus HT, además agrega la representación de un ángulo recto (ver figura 58), el V-BP1-S2|1:17:37-1:17:35|: "Lo mismo, pero y el porqué", la V-BPa3-S2|1:17:46-1:17:51|: "La esfera está en la tercera dimensión y la recta está en el plano", el V-BP1-S2|1:17:52-1:18:08|: "Yo le puse porque en la esfera hay dos puntos de intersección…, pero en el plano no".	**Exponen** que los ángulos se mide con grados y radianes. **Describen** un instrumento y unidades de medida de ángulos, un círculo dividido en las partes que se quieran. **Reconocen** que en el plano hay cuatro ángulo con la intersección de rectas y en la esfera ocho. **Justifican** la diferencia en la cantidad de ángulos por la cantidad de intenciones y estas por las	Reconociendo que han medido ángulos en grados y radianes, pero que al dividir un círculo en partes iguales y en la cantidad que se quieran, también podemos medir ángulos con partes de círculo. Habían formado ángulos con segmentos, por lo que reconocen que si se prolongan los segmentos se forman los ocho ángulos. Cuestionan la cantidad de ángulo por las dos interseccionesentre rectas y estas porque la esfera en un objeto 3D. Además, describiendo que la forma del ángulo se

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 58. Respuesta de la T3 por BPa3. Fuente: HT.	dimensiones de las superficies. **Construyen** un ángulo recto. **Reconocen** que se mantiene la forma de los ángulos.	mantiene en el plano y en la esfera.
En la DG, el V-BP1-S2|1:27:36-1:27:45|: "De las que se mantienen, solo pusimos que forman, tanto en el plano como en la esfera, se forman ángulos al intersectarse dos rectas". Después de escuchar la justificación de las diferencias por APa1, el V-BP1-S2|1:30:25-1:30:41|: "Complementando lo que dice ella, nosotros pusimos que en el plano solo notamos que hay una intersección, sin embargo, acá hay dos; sería en los polos, entonces creo que por ahí va la idea". El IP pregunta por qué hay dos interseccionesacá, pero no tienen respuesta.	**Reconocen** que se mantiene la forma de los ángulos. **Justifican** la diferencia en la cantidad de ángulos por la cantidad de intenciones.	Describiendo que en las dos superficies se forman ángulos. Y argumentando que por la cantidad de interseccionescambia la cantidad de ángulos.
Equipo C: (T1) Ante las preguntas, el V-CP2-S2|1:05:10-1:05:12|: "La distancia de la abertura". Sin pasar a las otras tareas, en el equipo buscan ángulos sobre el globo terráqueo (ver figura 59). En la DG, ante la pregunta sobre la composición del ángulo, la V-CPa1-S2|1:06:12-1:06:17|: "Con dos rayos que se intersecan en un punto, llamado vértice". Se les preguntó si se puede formar ángulo con rectas; todos respondieron que sí. Al preguntar cuántos ángulos se forman con dos rectas, el V-CP2-S2|1:08:08-1:08:08|: "Cuatro ángulos". Al preguntar si podrían tener una recta y una semirrecta, el V-CP2-S2|1:08:27-1:08:28|: "Sí, se formarían tres".	**Cuestionan** si la abertura de un ángulo es una distancia. **Buscan e identifican** ángulos en la esfera. **Forman** ángulos con dos rayos, dos rectas y una recta y una semirrecta. **Notan** que la cantidad de ángulos cambia si en el plano estos se forman con semirrectas, rectas y combinación de ellos.	Analizando la construcción del ángulo en el plano, localizan ángulos en la esfera. Contando los ángulos que se forman con dos semirrectas, dos rectas y una recta y una semirrecta.
 Figura 59. El equipo C reconoce ángulos en el globo terráqueo. Fuente: Video-sesión 2.		
Se hace una discusión sobre si medimos la distancia del ángulo o la abertura. El IP pregunta cómo medimos distancias, el V-CP2-S2|1:10:00-1:10:01|: "En este caso con el transportador". El IP pregunta, ¿pero estamos midiendo distancias? El V-CP2-	**Cuestionan** si se mide la distancia del ángulo o la abertura.	Exponiendo que para medir ángulos se usa el transportador, por lo que se mide la abertura de ese.

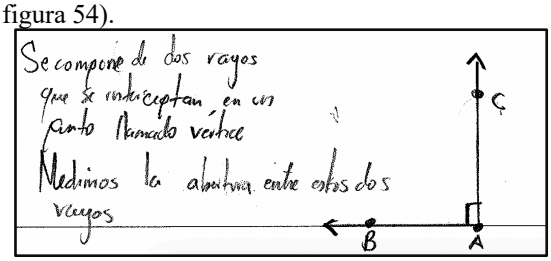
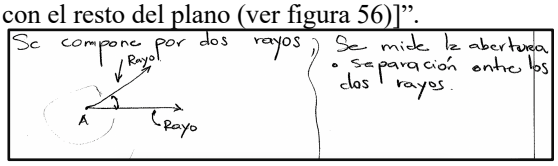
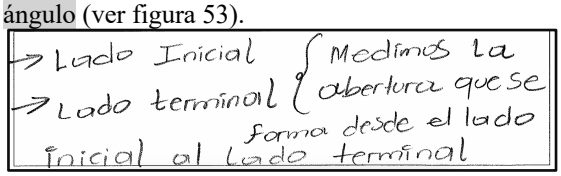
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
S2|1:10:06-1:10:28|: "Eh, no". El IP hace una explicación sobre la distancia que habría entre dos objetos que están en los lados de un ángulo y si estos objetos se alejan del vértice, la distancia aumentaría, pero el ángulo sería el mismo. (T2) Al preguntar si identifican ángulos, todos mencionan que sí; al preguntar cuántos ángulos identifican, el V-CP2-S2|1:12:28-1:12:28|: "Cuatro ángulos". (T3) El V-CP2-S2|1:21:00-1:21:52|: "Hay dos rectas y se forman ángulos; aquí se forman otros cuatro ángulos, se duplican los ángulos, aunque tengan medidas diferentes, pero se duplican…, ahora me definen ocho ángulos…, en el plano me definen cuatro ángulos y en la esférica ocho ángulos". La V-CPa1-S2|1:25:14-1:25:24|: "Yo puse que mantenían que se intersecan los puntos". En sus HT, la CPa3 justifica las diferencias al cambio de superficie (ver figura 60).  Figura 60. Respuesta de la T3 por CPa3. Fuente: HT.	**Admiten** que del ángulo se mide la abertura. **Identifican** ángulos en la esfera. **Reconocen** que se forman ocho ángulos en la esfera. **Duplican** los ángulos con las intersecciones. **Justifican** la diferencia de la cantidad de ángulos por los cambios de superficie.	**Localizando** ángulos en la esfera. **Notan** que se forman cuatro ángulos en cada una de las intersecciones. Es decir, como las interseccionesse duplican, la cantidad de ángulos también.
En la DG, al discutir sobre las diferencias, V-CP2-S2|1:28:12-1:28:21|: "Que con la intersección de dos rectas en el plano me genera cuatro ángulos y, en cambio, en la parte esférica forma ocho ángulos, todos ellos congruentes, correspondientes y congruentes". El IP preguntó cuáles son los ángulos congruentes, V-CP2-S2|1:28:32-1:28:38|: "Acá van a ser congruentes [señala los ángulos internos de una lúnula (ver figura 61)], por la misma abertura, igual que pasó con estos y estos [señala los ángulos internos de las otras lúnulas]". Al pedirle que explique para todos, el V-CP2-S2|1:28:48-1:28:45|: "Si nosotros consideramos estos vértices, o bueno los polos, nosotros nos damos cuenta que, por ejemplo, estos dos de acá van a ser congruentes, por la misma abertura, y como de igual forma en esta y en esta [vuelve a señalar los ángulos internos de lúnulas]". Cuando el AP3 menciona que serían cuatro ángulos porque al trazar toda la recta se forman los mismos ángulos, el V-CP2-S2|1:29:16-1:29:45|: "No, porque tendrían distintos vértices". Cuando el IP pregunta, por qué hay dos interseccionesen la esfera, el V-CP2-S2|1:31:02-1:31:24|: "Porque en el plano las rectas son infinitas, se extienden de forma infinita, y en este cambio no. A cambio, son circunferencias, entonces estas circunferencias van a tener una cierta medida y justamente la intersección de estas medidas va a definir ángulos; cada una de las dos interseccionesson ángulos".	**Reconocen** que la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera son diferentes. **Señalan** ángulos internos en un polígono de dos lados. **Admiten** que los ángulos internos en el polígono de dos lados son congruentes. **Exponen** que los ángulos que se forman en cada intersección son diferentes porque los vértices son diferentes. **Diferencian** los ángulos por los vértices. **Justifican** la diferencia en la cantidad de ángulos en el	**Analizan** sus construcciones en el plano y en la esfera, identifican que la cantidad de ángulos es diferente porque las interseccionesson diferentes. Por otro lado, muestran que los ángulos internos de un polígono de dos lados son congruentes. Como otros participantes decían que son los mismo ángulos porque se forman con la mismas rectas, **argumentan** que son ángulos diferentes porque sus vértices son diferentes. **Exponen** que son diferentes cantidades de ángulos por la infinitud de la recta en el plano y la finitud de la recta en la esfera.

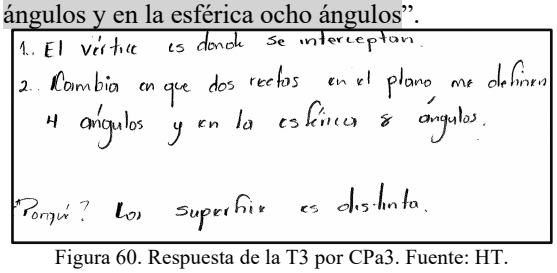
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 61. El CP2 señala ángulos internos de una lúnula. Fuente: Video-sesión 2. La CPa1, en sus HT, reconoce las diferencias entre superficies por la infinitud de una y la finitud de la otra (ver figura 62).  Figura 62. Respuesta de la T3 por CPa1. Fuente: HT.	plano y en la esfera, porque en el plano las rectas son infinitas y en la esfera son circunferencias. **Reconocen** que las circunferencias máximas se van a intersecar en dos puntos, los polos del ecuador. **Justifican** la diferencia en la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera, por la diferencia en las superficies.	Caracterizando la superficie de la esfera, como una superficie finita.

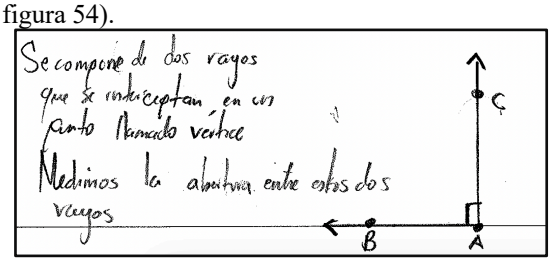
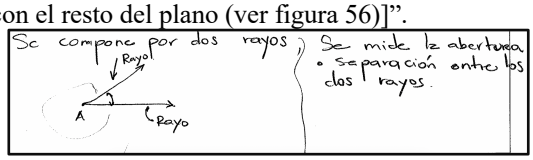
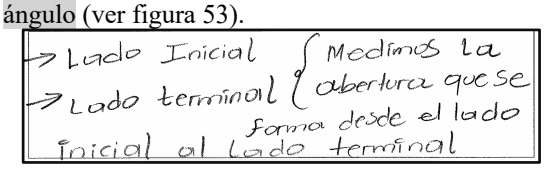
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
Construyen un ángulo plano; agregan símbolos a su representación para la dirección del ángulo y flechas en las semirrectas; identifican y nombran los lados del ángulo (inicial y terminal) y el vértice; señalan la apertura o abertura del ángulo (como la forma del ángulo); identifican cuatro ángulos en la intersección de dos rectas, tres en la intersección de una recta y una semirrecta y dos en la intersección de dos semirrectas; reconocen que del ángulo se mide la abertura; exponen que los ángulos se miden con grados y radianes; describen un instrumento y unidades de medida de ángulos, un círculo dividido en las partes que se quieran; para **exponer propiedades del ángulo plano**. Reconocen que los ángulos, tanto en el plano como en la esfera, en cuanto elementos y formas son iguales; identifican en la esfera cuatro ángulos en cada una de las intersecciones; exponen que los ángulos que se forman en cada intersección son diferentes porque los vértices son diferentes; cuestionan la diferencia en la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera; justifican la diferencia en la cantidad de ángulos por la cantidad de intersecciones, la cantidad de interseccionespor la diferencia en las superficies, es decir, por la infinitud del plano y la finitud de la esfera; identifican en la esfera ángulos opuestos por el vértice y reconocen que son congruentes; identifican ángulos internos en un polígono de dos lados y los reconocen congruentes; reconocen que los cuatro ángulos de una intersección son congruentes correspondientemente con los cuatro ángulos de la otra intersección; para **reconocer propiedades de los ángulos esféricos formados por dos rectas esféricas**.

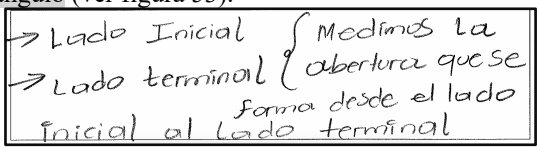
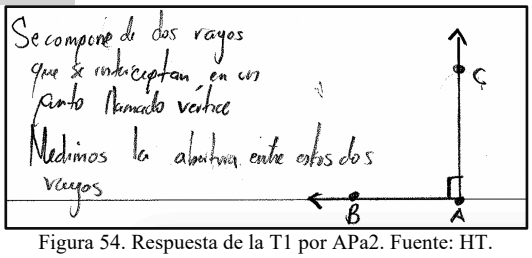
2-2 Análisis de usos: parte IV

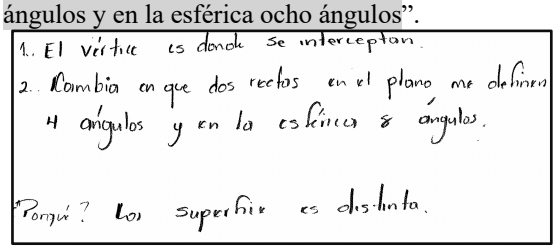
En el papel que desempeña la noción matemática en la tarea se hará una distinción entre el plano [p] y la esfera [E]. En la tabla anterior (análisis de acciones y actividades), se marcarán las acciones y actividades donde estén involucradas las nociones matemáticas de interés.

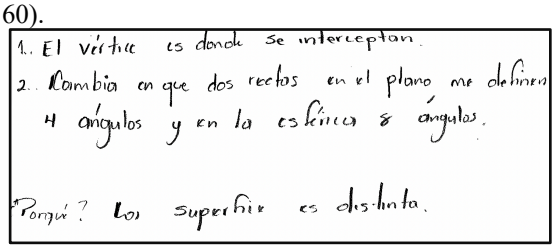
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Recta y segmento de recta plano y esférico		
En las acciones	Agregan símbolos a su representación para la dirección del ángulo y flechas en las semirrectas.	En sus HT, la APa2 presenta un ángulo recto (ver figura 54).  Figura 54. Respuesta de la T1 por APa2. Fuente: HT.	Construyen ángulos planos, agregando flechas para indicar que las semirrectas son infinitas y agregan la dirección del ángulo.	La **recta transfiere** algunas de sus **propiedades** al segmento y a la semirrecta [P]. **Recta infinita** [P].
		V-BP1-S2|1:06:34-1:06:34|: "Segmentos [es decir, que los lados también pueden ser segmentos]". Además, agrega V-BP1-S2|1:06:55-1:07:09|: "Bueno, el complemento de lo que dijo la compañera [menciona el nombre de APa1] sería la dirección, porque puede haber dos direcciones cuando se mide el ángulo". El IP pregunta si cambia la medida si se mide de lado al otro y luego viceversa; V-BP1-S2|1:07:22-1:07:24|: "Sí, porque sería el complemento [refiere al otro ángulo que se forma con el resto del plano (ver figura 56)]".	Exponen que los lados de un ángulo pueden ser segmentos, semirrectas y rectas.	La **recta transfiere** algunas de sus **propiedades** al segmento y a la semirrecta [P]. Recta **como elemento compositor** de un ángulo [P].
		 Figura 56. Respuesta de la T1 por BP1. Fuente: HT.	Reconocen que con dos semirrectas se forman dos ángulo, por lo que es necesario mostrar la dirección del ángulo. Además, que se mide la separación de esas semirrectas.	Recta **como elemento compositor** de un ángulo [P]. Recta **como indicativo de la forma** (cualidad) de un ángulo [P].
	Identifican y nombran los lados del ángulo (inicial y terminal) y el vértice.	V-APa1-S2|1:06:21-1:06:22|: "Tenemos un lado inicial y un lado terminal". En sus HT describe estos lados como referencias para medir la abertura del ángulo (ver figura 53).  Figura 53. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT.	Después de construir un ángulo, nombran los lados indicando el inicial y terminal en el proceso de medida del ángulo.	Semirrecta **como referencia al proceso de medida de un ángulo** [P].
	Identifican cuatro ángulos en la intersección de dos rectas, tres en la intersección de una recta	la V-CPa1-S2|1:06:12-1:06:17|: "Con dos rayos que se intersecan en un punto, llamado vértice". Se les preguntó si se puede formar ángulo con rectas; todos respondieron que sí. Al preguntar cuántos ángulos se forman con dos rectas, el V-CP2-S2|1:08:08-1:08:08|: "Cuatro ángulos". Al preguntar si podrían tener una recta y una semirrecta, el V-CP2-S2|1:08:27-1:08:28|: "Sí, se formarían tres".	Construyen un ángulo con dos semirrectas, reconocen que el punto de intersección es el vértice del ángulo. Describen que si se tienen dos rectas se forman cuatro ángulos y que se se interceta	Recta **como elemento compositor** de un ángulo [P]. La **recta transfiere** algunas de sus **propiedades** al segmento y a la semirrecta [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	y una semirrecta y dos en la intersección de dos semirrectas.		una recta con una semirrecta se forman tres ángulos.	
	Identifican en la esfera cuatro ángulos en cada una de las intersecciones.	Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, el AP3 dice que cuatro, pero al escuchar las respuestas de CP2 y BP1, el V-AP3-S2|1:12:33-1:12:34|: "Cuatro en cada polo". Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, después de escuchar la respuesta del CP2, el V-BP1-S2|1:12:30-1:12:31|: "Ocho, no". En la DE, V-BPa3-S2|1:15:04-1:15:05|: "Los mismos ángulos que el plano", V-BPa2-S2|1:16:25-1:16:26|: "En la esfera se forman ocho", entonces la V-BPa3-S2|1:16:27-1:16:28|: "Ah, pero si usted sigue [si se continúa el segmento de recta]". V-CP2-S2|1:21:00-1:21:52|: "Hay dos rectas y se forman ángulos; aquí se forman otros cuatro ángulos, se duplican los ángulos, aunque tengan medidas diferentes, pero se duplican…, ahora me definen ocho ángulos…, en el plano me definen cuatro ángulos y en la esférica ocho ángulos".  1. El vértice es donde se interceptan. 2. Cambia en que dos rectas en el plano me definen 4 ángulos y en la esférica 8 ángulos. ¿Porqué? La superficie es distinta. Figura 60. Respuesta de la T3 por CPa3. Fuente: HT.	Identifican que en la esfera las rectas se intersecan en dos puntos y que en cada una de las interseccionesse forman cuatro ángulos. Exponen que en la esféra se forman ocho ángulo si se continúa el segmento y se forma la circunferencia máxima. Describen que dos rectas en el plano (que se intersecan) y en la esfera forman ángulos, pero en la superficie esférica hace que se dupliquen los ángulos.	Todas **las rectas esféricas se intersecan en dos puntos** [E]. **Recta extensible** [E]. **Recta finita-ilimitada** [E]. Recta **como la circunferencia máxima** [E]. Las **rectas que se intersecan en el plano, lo hacen en un solo punto** [P].
	Identifican ángulos internos en un polígono de dos lados y los reconocen congruentes.	Después de que el CP2 menciona y explica que los ángulos internos de la lúnula son congruentes, el V-AP3-S2|1:28:40-1:28:40|: "Esa era mi duda". Después de la nueva explicación del CP2, el V-AP3-S2|1:29:00-1:29:05|: "Esa era mi duda, entonces solo serían cuatro ángulos, porque serían los mismos", el IP aclara que serían ángulos con la misma medida, el CP2 dice que serían diferentes ángulos, el V-AP3-S2|1:29:14-1:29:26|: "Sí, no, porque si trazas toda la circunferencia se van a formar los mismos", el CP2 dice que no, porque tendrían distintos vértices, el V-AP3-S2|1:29:20-1:29:05|: "Oh ya, por los polos opuestos decís vos [el CP2 menciona que por los vértices], … Sí". V-CP2-S2|1:28:12-1:28:21|: "Que con la intersección de dos rectas en el plano me genera cuatro ángulos y, en cambio, en la parte esférica forma ocho ángulos, todos ellos congruentes, correspondientes y congruentes". El IP preguntó cuáles son los ángulos congruentes, V-CP2-S2|1:28:32-1:28:38|: "Acá van a ser congruentes [señala los ángulos internos de una lúnula (ver figura	Describen un polígono de dos lados y reconocen que sus ángulos internos son congruentes. Inicialmente piensan que los ángulos que se forman en las dos interseccionesson los mismo, por ser ángulos que se forman con las dos mismas rectas. Al reconocer que las dos interseccionesson diferentes concluyen que los ángulos son diferentes. Además, reconocen que los cuatro ángulo de una de las interseccionesson congruntes correspondientemente con los cuatro ángulos de la otra intersección.	Segmento como **elemento compositor de un polígono [E]**. **Dos rectas esféricas se intersecan en dos puntos diferentes [E]**. **Dos rectas esféricas forman ocho ángulos [E]**. **Dos rectas esféricas forman dos grupos de cuatro ángulos congruentes correspondientemente [E]**.

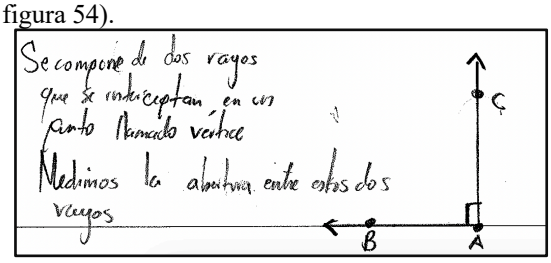
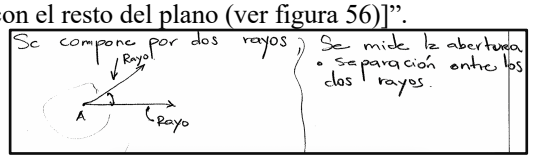
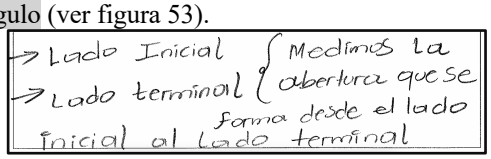
Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	61)], por la misma abertura, igual que pasó con estos y estos [señala los ángulos internos de las otras lúnulas]". Al pedirle que explique para todos, el V-CP2-S2|1:28:48-1:28:45|: "Si nosotros consideramos estos vértices, o bueno los polos, nosotros nos damos cuenta que, por ejemplo, estos dos de acá van a ser congruentes, por la misma abertura, y como de igual forma en esta y en esta [vuelve a señalar los ángulos internos de lúnulas]". Figura 61. El CP2 señala ángulos internos de una lúnula. Fuente: Video-sesión 2.		
	Ángulo plano y esférico		
Construyen un ángulo plano. Agregan símbolos a su representación para la dirección del ángulo y flechas en las semirrectas.	En sus HT, la APa2 presenta un ángulo recto (ver figura 54).  Figura 54. Respuesta de la T1 por APa2. Fuente: HT. V-BP1-S2|1:06:34-1:06:34|: "Segmentos [es decir, que los lados también pueden ser segmentos]". Además, agrega V-BP1-S2|1:06:55-1:07:09|: "Bueno, el complemento de lo que dijo la compañera [menciona el nombre de APa1] sería la dirección, porque puede haber dos direcciones cuando se mide el ángulo". El IP pregunta si cambia la medida si se mide de lado al otro y luego viceversa; V-BP1-S2|1:07:22-1:07:24|: "Sí, porque sería el complemento [refiere al otro ángulo que se forma con el resto del plano (ver figura 56)]".  Figura 56. Respuesta de la T1 por BP1. Fuente: HT.	Construyen ángulos planos, la mayoría construye ángulos rectos, agregando flechas para indicar que las semirrectas son infinitas y agregan la dirección del ángulo. Exponen que los lados de un ángulo pueden ser segmentos, semirrectas y rectas. Reconocen que con dos semirrectas se forman dos ángulo, por lo que es necesario mostrar la dirección del ángulo. Además, que se mide la separación de esas semirrectas.	**Ángulo recto como prototipo de ángulo** [P]. **Ángulo como relación** (compuesto por elementos) [P]. **Angulo como cualidad** (por su forma, la abertura) [P]. **Ángulo como relación** (compuesto por elementos) [P]. **El ángulo divide al plano en dos regiones** [P]. **Ángulo como cantidad** (por la medida de la abertura) [P].
Identifican y nombran los lados del ángulo (inicial y terminal) y el vértice. Señalan la apertura o	V-APa1-S2|1:06:21-1:06:22|: "Tenemos un lado inicial y un lado terminal". En sus HT describe estos lados como referencias para medir la abertura del ángulo (ver figura 53).  	Después de construir un ángulo, nombran los lados indicando el inicial y terminal en el proceso de medida del ángulo.	**Ángulo como cantidad** (por la medida de la abertura) [P]. **Angulo como cualidad** (por su forma, la abertura) [P].

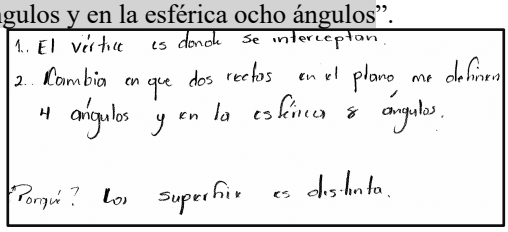
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	abertura del ángulo (como la forma del ángulo).	Figura 53. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT.		
	Identifican cuatro ángulos en la intersección de dos rectas, tres en la intersección de una recta y una semirrecta y dos en la intersección de dos semirrectas.	La V-CPa1-S2|1:06:12-1:06:17|: "Con dos rayos que se intersecan en un punto, llamado vértice". Se les preguntó si se puede formar ángulo con rectas; todos respondieron que sí. Al preguntar cuántos ángulos se forman con dos rectas, el V-CP2-S2|1:08:08-1:08:08|: "Cuatro ángulos". Al preguntar si podrían tener una recta y una semirrecta, el V-CP2-S2|1:08:27-1:08:28|: "Sí, se formarían tres".	Construyen y describen la composición de un ángulo, reconocen que sus lados puede ser semirectas, rectas o segmentos. Además, que con dos rectas se forman cuatro ángulo, con una recta y una semirrecta se forman tres ángulos y con dos semirrecta se forman dos ángulos.	**El ángulo divide al plano en dos, tres o cuatro regiones** [P]. Ángulo **como una relación** [P].
	Reconocen que del ángulo se mide la abertura.	La V-APa1-S2|1:06:21-1:06:22|: "Tenemos un lado inicial y un lado terminal". En sus HT describe estos lados como referencias para medir la abertura del ángulo (ver figura 53).  Figura 53. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT.	Construyen ángulos planos, la mayoría construye ángulos rectos, agregando flechas para indicar que las semirrectas son infinitas y agregan la dirección del ángulo.	**Ángulo recto como prototipo de ángulo** [P]. **Ángulo como relación** (compuesto por elementos) [P]. **Angulo como cualidad** (por su forma, la abertura) [P].
		El V-AP3-S2|1:06:40-1:06:47|: "Yo puse dos semirrectas que forman una apertura que se interseca en un punto, llamado vértice". En sus HT, la APa2 presenta un ángulo recto (ver figura 54). Sobre lo que medimos cuando medimos ángulos; todos parecen estar de acuerdo en que se mide la apertura o abertura.  Figura 54. Respuesta de la T1 por APa2. Fuente: HT.	Exponen que los lados de un ángulo pueden ser segmentos, semirrectas y rectas. Reconocen que con dos semirrectas se forman dos ángulo, por lo que es necesario mostrar la dirección del ángulo. Además, que se mide la separación de esas semirrectas.	**Ángulo como relación** (compuesto por elementos) [P]. **El ángulo divide al plano en dos regiones** [P]. **Ángulo como cantidad** (por la medida de la abertura) [P].
	Exponen que los ángulos se miden con grados y radianes. Describen un instrumento y unidades de medida de ángulos, un	Al preguntar con qué unidades de medida se miden los ángulos, exponen los grados y los radianes. El IP pregunta si podemos tener otra unidad de medida, V-BP1-S2|1:11:44-1:11:50|: "Con la división de un círculo en las partes que se consideren".	Describen que los ángulos se miden en grados y radianes. Pero que también se puede construir un instrumento, un círculo dividido en partes iguales, esas partes serían las unidades de medida y se podría indicar cuantas partes de ese círculo mide un ángulo.	**Ángulo como cantidad** (por la medida de la abertura) [P]. Ángulo como **parte de un círculo** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	círculo dividido en las partes que se quieran			
	Reconocen que los ángulos, tanto en el plano como en la esfera, en cuanto elementos y formas son iguales.	El V-AP3-S2|1:18:29-1:18:29|: "Diferentes no las veo". El V-BP1-S2|1:27:36-1:27:45|: "De las que se mantienen, solo pusimos que forman, tanto en el plano como en la esfera, se forman ángulos al intersectarse dos rectas".	Comparan los ángulos planos con los ángulos esféricos y reconocen que su forma se mantiene.	**Ángulo como una cualidad** (por su forma) [P, E]. **Ángulo como una relación** [P, E].
	Identifican en la esfera cuatro ángulos en cada una de las intersecciones.	Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, el AP3 dice que cuatro, pero al escuchar las respuestas de CP2 y BP1, el V-AP3-S2|1:12:33-1:12:34|: "Cuatro en cada polo". Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, después de escuchar la respuesta del CP2, el V-BP1-S2|1:12:30-1:12:31|: "Ocho, no". En la DE, V-BPa3-S2|1:15:04-1:15:05|: "Los mismos ángulos que el plano", V-BPa2-S2|1:16:25-1:16:26|: "En la esfera se forman ocho", entonces la V-BPa3-S2|1:16:27-1:16:28|: "Ah, pero si usted sigue [si se continúa el segmento de recta]". V-CP2-S2|1:21:00-1:21:52|: "Hay dos rectas y se forman ángulos; aquí se forman otros cuatro ángulos, se duplican los ángulos, aunque tengan medidas diferentes, pero se duplican…, ahora me definen ocho ángulos…, en el plano me definen cuatro ángulos y en la esférica ocho ángulos".  1. El vértice es donde se interceptan. 2. Cambia en que dos rectas en el plano me definen 4 ángulos y en la esférica 8 ángulos. ¿Porqué? Los superficie es distinta. Figura 60. Respuesta de la T3 por CPa3. Fuente: HT.	Al comparar los ángulos en el plano y en la esfera, identifican que en el plano, con la intersección de dos rectas, se forman cuatro ángulos; en cambio en la esfera, se forman cuatro en cada polo. Cuentan los ángulos en el plano y en la esfera. Además, indican que si se prolongan las rectas hasta la segunda intersección es que se forman los ocho ángulos en la esfera. Justifican las cantidades de ángulos en el plano y en la esfera, identificando que las interseccionesse duplican y con ello la cantidad de ángulos.	Se forman **cuatro ángulo con la intersección de dos rectas** [P]. Se forman **ocho ángulo con dos rectas esférica** [E]. **Ángulo como relación entre rectas** [P, E]. **Ángulo duplicado** por las intersecciones[E]. **Ángulos regionales** son congruentes por compartir los mismos dos lados y la misma abertura (la misma región de la superficie) [E].
	Exponen que los ángulos que se forman en cada intersección son diferentes porque los	Cuando el AP3 menciona que serían cuatro ángulos porque al trazar toda la recta se forman los mismos ángulos, el V-CP2-S2|1:29:16-1:29:45|: "No, porque tendrían distintos vértices".	Inicialmente creen que son los mismos ángulos porque están formados por las mismas rectas, pero al reconocer que sus vértices son distintos los diferencian.	**Ángulos regionales** son congruentes por compartir los mismos dos lados y la misma abertura (la misma región de la superficie) [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	vértices son diferentes. Cuestionan la diferencia en la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera; justifican la diferencia en la cantidad de ángulos por la cantidad de intersecciones, la cantidad de intersecciones por la diferencia en las superficies, es decir, por la infinitud del plano y la finitud de la esfera.	La V-APa1-S2|1:19:18-1:19:37|: "Yo tengo una pregunta, ¿aquí se van a formar ocho, que se ven? [el AP3 dice que sí], pero por qué en el plano solo se forman cuatro y aquí ocho, será porque en el plano es infinito y esta una esfera, que es una superficie finita", V-APa2-S2|1:19:53-1:20:02|: "Sí, o sea aquí de cierta forma ya no se cortan, pero aquí sí se cortan, al cortarse forman cuatro", V-APa1-S2|1:20:05-1:20:18|: "En el plano, en este punto de acá las rectas se tocan, verdad, pero en ningún punto otra vez se vuelven a tocar, porque el plano es infinito, por eso". V-BPa2-S2|1:16:25-1:16:26|: "En la esfera se forman ocho", entonces la V-BPa3-S2|1:16:27-1:16:28|: "Ah, pero si usted sigue [si se continúa el segmento de recta]". El V-BP1-S2|1:16:28-1:16:35|: "Se da porque creo que si las dos rectas se intersecan en dos puntos y no solo en uno, y en el plano solo en uno". La V-BPa3-S2|1:17:23-1:17:30|: "Yo puse que tenía cuatro ángulos en el polo norte y en el polo sur; en total son ocho ángulos y se mantienen los ángulos [refiere a que se mantiene la forma de los ángulos]". En sus HT, además agrega la representación de un ángulo recto (ver figura 58), el V-BP1-S2|1:17:37-1:17:35|: "Lo mismo, pero y el porqué", la V-BPa3-S2|1:17:46-1:17:51|: "La esfera está en la tercera dimensión y la recta está en el plano", el V-BP1-S2|1:17:52-1:18:08|: "Yo le puse porque en la esfera hay dos puntos de intersección…, pero en el plano no".	Reconocen que en la esfera se forman ocho ángulo y en el plano solo cuatro. Luego intentan justificar esa diferencia mencionando que quizá se debe a la infinitud del plano y la finitud de la esfera. Por otro lado, señalan que en la esfera se dan dos interseccionesy en cada intersección se forman cuatro ángulos. Inicialmente habían identificado una intersección en la esfera, cuando escuchan que hay ocho ángulos, menciona que se forman los ocho si prolongan las rectas. De ahí señalan que la cantidad de interseccionescambia y con ellas la cantidad de ángulos, pero que la forma de los ángulos se mantiene tanto en el plano como en la esfera.	**Ángulo como relación** [P, E]. **Dos rectas forman cuatro ángulos** [P]. **Dos rectas forman ocho ángulos** [E]. Ángulo **dependiente de la superficie** [P, E]. **Ángulos duplicado** por la cantidad de intersecciones. **Ángulos regionales** son congruentes por compartir los mismos dos lados y la misma abertura (la misma región de la superficie) [E]. **Ángulo como relación** [P, E]. **Dos rectas forman cuatro ángulos** [P]. **Dos rectas forman ocho ángulos** [E]. **Ángulo como una cualidad** por su forma [P, E].
		V-CP2-S2|1:21:00-1:21:52|: "Hay dos rectas y se forman ángulos; aquí se forman otros cuatro ángulos, se duplican los ángulos, aunque tengan medidas diferentes, pero se duplican…, ahora me definen ocho ángulos…, en el plano me definen cuatro ángulos y en la esférica ocho ángulos". La V-CPa1-S2|1:25:14-1:25:24|: "Yo puse que mantenían que se intersecan los puntos". En sus HT, la CPa3 justifica las diferencias al cambio de superficie (ver figura 60).  Figura 60. Respuesta de la T3 por CPa3. Fuente: HT.	Notan que las cantidad de ángulos depende de que sus lados son rectas, por ello se muestran las dos interseccionesen la esfera. Señalan que esas interseccionesduplican la cantidad de ángulos y que la justificación de ese cambio es por la superficie.	**Ángulo como relación** [P, E]. **Ángulos duplicado** por la cantidad de intersecciones. Ángulo **dependiente de la superficie** [P, E].
	Identifican en la esfera ángulos	V-AP3-S2|1:20:19-1:20:23|: "Mi consulta es, pero los ángulos siempre serían los mismos", V-APa1-S2|1:20:27-1:20:38|: "Tendríamos que probar eso,	Exponen que los ángulos que se forman en las interseccionesson ángulos opuestos por el vértice y por	**Ángulos opuestos por el vértice por su posición** [P, E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	opuestos por el vértice y reconocen que son congruentes.	que este ángulo va con este ángulo dice usted, este de arriba con este de acá, habría que verificarlo [refiere a los ángulos opuestos por el vértice]", V-AP3-S2|1:20:38-1:20:44|: "Son los mismos porque son opuestos por el vértice, son los mismos". V-APa1-S2|1:23:00-1:23:05|: "Lo que usted dice, usted sabe que, en el plano, ya se sabe que los ángulos opuestos son congruentes, entonces, aquí este va con este, pero estaba tomando medio la demostración de que este era congruente con este; eso quisiera saber [se refiere a los ángulos internos de la lúnula]".	ello son congruentes, dado que es algo que se cumple en el plano.	**Ángulo como argumento** en propiedades matemáticas [P, E]. **Ángulo como cantidad** [P, E].
	Identifican ángulos internos en un polígono de dos lados y los reconocen congruentes. Reconocen que los cuatro ángulos de una intersección son congruentes correspondientemente con los cuatro ángulos de la otra intersección	Después de que el CP2 menciona y explica que los ángulos internos de la lúnula son congruentes, el V-AP3-S2|1:28:40-1:28:40|: "Esa era mi duda". Después de la nueva explicación del CP2, el V-AP3-S2|1:29:00-1:29:05|: "Esa era mi duda, entonces solo serían cuatro ángulos, porque serían los mismos", el IP aclara que serían ángulos con la misma medida, el CP2 dice que serían diferentes ángulos, el V-AP3-S2|1:29:14-1:29:26|: "Sí, no, porque si trazas toda la circunferencia se van a formar los mismos", el CP2 dice que no, porque tendrían distintos vértices, el V-AP3-S2|1:29:20-1:29:05|: "Oh ya, por los polos opuestos decís vos [el CP2 menciona que por los vértices], … Sí". V-CP2-S2|1:28:12-1:28:21|: "Que con la intersección de dos rectas en el plano me genera cuatro ángulos y, en cambio, en la parte esférica forma ocho ángulos, todos ellos congruentes, correspondientes y congruentes". El IP preguntó cuáles son los ángulos congruentes, V-CP2-S2|1:28:32-1:28:38|: "Acá van a ser congruentes [señala los ángulos internos de una lúnula (ver figura 61)], por la misma abertura, igual que pasó con estos y estos [señala los ángulos internos de las otras lúnulas]". Al pedirle que explique para todos, el V-CP2-S2|1:28:48-1:28:45|: "Si nosotros consideramos estos vértices, o bueno los polos, nosotros nos damos cuenta que, por ejemplo, estos dos de acá van a ser congruentes, por la misma abertura, y como de igual forma en esta y en esta [vuelve a señalar los ángulos internos de lúnulas]". Figura 61. El CP2 señala ángulos internos de una lúnula. Fuente: Video-sesión 2.	Reconocen y señalan ángulos que comparten la misma región de la superficie, por ello, aceptan que son congruentes. Pero por compartir sus lados y región inicialmente piensan que son los mismos. Sin embargo, como notan que sus vértices son diferentes por lo que serían ángulos distintos. Describen que con dos rectas la superficie de la esfera queda dividida en cuatro regiones, cada una de esas regiones tiene dos ángulos internos y son congruentes, es decir, que los cuatro ángulos de una intersección son congruentes correspondientemente con los cuatro ángulos de la otra intersección.	**Ángulos regionales** son congruentes por compartir los mismos dos lados y la misma abertura (la misma región de la superficie) [E]. Ángulo **como una cantidad** [E]. **Ángulos regionales** son congruentes por compartir los mismos dos lados y la misma abertura (la misma región de la superficie) [E]. Ángulo **como una cantidad** [E]. Ángulo como **elemento compositor de un polígono** [E].
E	***Recta y segmento de recta plano y esférico***			

Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
Ángulo plano y esférico			
Exponer propiedades del ángulo plano.	En sus HT, la APa2 presenta un ángulo recto (ver figura 54).  Figura 54. Respuesta de la T1 por APa2. Fuente: HT. V-BP1-S2|1:06:34-1:06:34|: "Segmentos [es decir, que los lados también pueden ser segmentos]". Además, agrega V-BP1-S2|1:06:55-1:07:09|: "Bueno, el complemento de lo que dijo la compañera [menciona el nombre de APa1] sería la dirección, porque puede haber dos direcciones cuando se mide el ángulo". El IP pregunta si cambia la medida si se mide de lado al otro y luego viceversa; V-BP1-S2|1:07:22-1:07:24|: "Sí, porque sería el complemento [refiere al otro ángulo que se forma con el resto del plano (ver figura 56)]".  Figura 56. Respuesta de la T1 por BP1. Fuente: HT. V-APa1-S2|1:06:21-1:06:22|: "Tenemos un lado inicial y un lado terminal". En sus HT describe estos lados como referencias para medir la abertura del ángulo (ver figura 53).  Figura 53. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT. la V-CPa1-S2|1:06:12-1:06:17|: "Con dos rayos que se intersecan en un punto, llamado vértice". Se les preguntó si se puede formar ángulo con rectas; todos respondieron que sí. Al preguntar cuántos ángulos se forman con dos rectas, el V-CP2-S2|1:08:08-1:08:08|: "Cuatro ángulos". Al preguntar si podrían tener una recta y una semirrecta, el V-CP2-S2|1:08:27-1:08:28|: "Sí, se formarían tres".	Construyen un ángulo plano; agregan símbolos a su representación para la dirección del ángulo y flechas en las semirrectas; identifican y nombran los lados del ángulo (inicial y terminal) y el vértice; señalan la apertura o abertura del ángulo (como la forma del ángulo); identifican cuatro ángulos en la intersección de dos rectas, tres en la intersección de una recta y una semirrecta y dos en la intersección de dos semirrectas; reconocen que del ángulo se mide la abertura; exponen que los ángulos se miden con grados y radianes; describen un instrumento y unidades de medida de ángulos, un círculo dividido en las partes que se quieran.	**Ángulo como relación** [P]. **Ángulo como cualidad** por su forma [P]. **Dos rectas formas cuatro ángulos en el plano** [P]. **Una recta y una semirrecta forman tres ángulos** en el plano [P]. **Dos semirrectas forman dos ángulos en el plano** [P]. **Ángulo como una cantidad** [P]. **Ángulo como parte de un círculo** [P].
Reconocer propiedades de los ángulos esféricos formados por dos rectas esféricas.	Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, el AP3 dice que cuatro, pero al escuchar las respuestas de CP2 y BP1, el V-AP3-S2|1:12:33-1:12:34|: "Cuatro en cada polo". Al preguntar por la cantidad de ángulos en la esfera, después de escuchar la respuesta del CP2, el V-BP1-S2|1:12:30-1:12:31|: "Ocho, no". En la DE, V-BPa3-S2|1:15:04-1:15:05|: "Los mismos ángulos que el plano", V-BPa2-S2|1:16:25-1:16:26|: "En la esfera se forman ocho", entonces la	Reconocen que los ángulos, tanto en el plano como en la esfera, en cuanto elementos y formas son iguales; identifican en la esfera cuatro ángulos en cada una de las intersecciones; exponen que los ángulos que se forman en cada intersección son diferentes porque los vértices	**Ángulo como relación** [P, E]. **Ángulo como cualidad** por su forma [P, E]. **Dos rectas forman ocho ángulos** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		V-BPa3-S2|1:16:27-1:16:28|: "Ah, pero si usted sigue [si se continúa el segmento de recta]". V-CP2-S2|1:21:00-1:21:52|: "Hay dos rectas y se forman ángulos; aquí se forman otros cuatro ángulos, se duplican los ángulos, aunque tengan medidas diferentes, pero se duplican…, ahora me definen ocho ángulos…, en el plano me definen cuatro ángulos y en la esférica ocho ángulos".  1. El vértice es donde se interceptan. 2. Cambia en que dos rectas en el plano me definen 4 ángulos y en la esférica 8 ángulos. ¿Porqué? Los superficies es distinta. Figura 60. Respuesta de la T3 por CPa3. Fuente: HT. Después de que el CP2 menciona y explica que los ángulos internos de la lúnula son congruentes, el V-AP3-S2|1:28:40-1:28:40|: "Esa era mi duda". Después de la nueva explicación del CP2, el V-AP3-S2|1:29:00-1:29:05|: "Esa era mi duda, entonces solo serían cuatro ángulos, porque serían los mismos", el IP aclara que serían ángulos con la misma medida, el CP2 dice que serían diferentes ángulos, el V-AP3-S2|1:29:14-1:29:26|: "Sí, no, porque si trazas toda la circunferencia se van a formar los mismos", el CP2 dice que no, porque tendrían distintos vértices, el V-AP3-S2|1:29:20-1:29:05|: "Oh ya, por los polos opuestos decís vos [el CP2 menciona que por los vértices], … Sí". V-CP2-S2|1:28:12-1:28:21|: "Que con la intersección de dos rectas en el plano me genera cuatro ángulos y, en cambio, en la parte esférica forma ocho ángulos, todos ellos congruentes, correspondientes y congruentes". El IP preguntó cuáles son los ángulos congruentes, V-CP2-S2|1:28:32-1:28:38|: "Acá van a ser congruentes [señala los ángulos internos de una lúnula (ver figura 61)], por la misma abertura, igual que pasó con estos y estos [señala los ángulos internos de las otras lúnulas]". Al pedirle que explique para todos, el V-CP2-S2|1:28:48-1:28:45|: "Si nosotros consideramos estos vértices, o bueno los polos, nosotros nos damos cuenta que, por ejemplo, estos dos de acá van a ser congruentes, por la misma abertura, y como de igual forma en esta y en esta [vuelve a señalar los ángulos internos de lúnulas]". Figura 61. El CP2 señala ángulos internos de una lúnula. Fuente: Video-sesión 2.	son diferentes; cuestionan la diferencia en la cantidad de ángulos en el plano y en la esfera; justifican la diferencia en la cantidad de ángulos por la cantidad de intersecciones, la cantidad de interseccionespor la diferencia en las superficies, es decir, por la infinitud del plano y la finitud de la esfera; identifican en la esfera ángulos opuestos por el vértice y reconocen que son congruentes; identifican ángulos internos en un polígono de dos lados y los reconocen congruentes; reconocen que los cuatro ángulos de una intersección son congruentes correspondientemente con los cuatro ángulos de la otra intersección.	**Ángulos opuestos por el vértice por su posición** [P, E]. **Ángulos regionales** son congruentes por compartir los mismos dos lados y la misma abertura (la misma región de la superficie) [E]. Ángulo **como una cantidad** [E]. Ángulo como **elemento compositor de un polígono** [E]. **Ángulos duplicado** por la cantidad de intersecciones. Ángulo **dependiente de la superficie** [P, E].

5. Parte V. Dos ángulo

1. ¿Qué es un polígono?
2. ¿Cuál es el polígono de menor cantidad de lados en el plano?, ¿es el mismo en la esfera?
3. En la construcción anterior de dos rectas esféricas ¿identifica polígonos?, si es así, ¿cómo lo nombraría?
4. Caracterice ese polígono, para ello puede orientarse en las siguientes preguntas: ¿pueden sus lados tener diferentes medidas?, ¿cuánto miden sus lados?, ¿qué relación existe entre sus ángulos internos?, se pueden clasificar, si es así, ¿bajo qué criterio y qué tipos tendríamos?

Hipótesis didáctica:

Bajo una caracterización general de polígono (T1), expondrán al triángulo como el polígono de menor cantidad de lados, tanto en el plano como en la esfera (T2). Sin embargo, al estudiar la construcción anterior, identificarán polígonos de dos lados en la esfera (T3). Por la nomenclatura de las partes del diseño, se espera que nombre este polígono según la cantidad de ángulos: biángulo, diángulos o dosángulos. Al analizar ese nuevo polígono, (T4) reconocerán que sus lados siempre van a medir una semicircunferencia, que sus ángulos internos siempre van a ser congruentes entre ellos. Por ello, el criterio de clasificación estará centrado en la medida de los ángulos internos, algo semejante a la clasificación de los triángulos según sus ángulos.

Descripción general:

Caracterizaron un polígono como una figura plana compuesta por tres o más lados y que encerraba un área. Esto les hace pensar, por lo menos al equipo A, que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados también en la esfera; los demás equipos reconocen desde el principio la existencia de un polígono de dos lados. A este polígono lo llaman biángulo y biágono; al caracterizarlo, reconocen que sus lados miden ½ de circunferencia máxima y que sus ángulos internos son congruentes entre ellos, de ahí que los clasifican según la medida de sus ángulos, en biángulo agudos, rectos y obtusos; además, bajo el mismo criterio, reconocen biángulo complementarios y suplementarios.

Descripción particular:

Equipo A:

(T1) Después de la intervención de BPa2, el IP le pregunta a AP3 sobre lo que piensa, el V-AP3-S2|1:34:00-1:34:13|: “Yo digo que un polígono es una figura que tiene más de tres lados y que al juntarse forman un área interna, tienen un área interna”.

(T2) Todo el grupo estuvo de acuerdo en que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano. En la DE, V-APa2-S2|1:39:21-1:39:24|: “Es que yo me acuerdo que como no hay paralelas no se podía”, V-APa1-S2|1:39:29-1:39:31|: “El triángulo se puede porque esas no son paralelas”, el V-AP3-S2|1:40:10-1:40:13|:

"Sí, correcto, cuadrados no habrían", V-APa2-S2|1:40:15-1:40:27|: "Entonces el triángulo, ahí está la duda porque entonces sí se cortan los puntos, pero este vértice de aquí a acá, no es un triángulo o sí [está intentando dibujar un triángulo]". V-APa1-S2|1:40:56-1:40:59|: "Según un polígono, es una línea poligonal cerrada". El V-AP3-S2|1:40:59-1:41:23|: "Sí, pero no sé cómo sería un triángulo en la esfera, en la superficie de la esfera…, ahí es una figura de tres lados [algo que dibujó APa2]; en teoría, sí, todas las figuras de tres lados se llaman triángulos". El IP pregunta por qué se llama triángulo, el V-AP3-S2|1:41:25-1:41:26|: "Porque tiene tres lados y tres ángulos y tres vértices". El IP pregunta si el tercer lado del triángulo que construyeron lo hicieron con la regla esférica, todos responden que sí. IP: "Entonces, sí, es un segmento de recta esférica".

Cuando el CP2 lo nombra como biángulo por la analogía del triángulo, el V-AP3-S2|1:46:10-1:46:13|: "Pero el cuadrado no es cuadrángulo". V-APa2-S2|1:46:38-1:40:27|: "Entonces esto de acá forma un polígono [señala una lúnula]", el V-AP3-S2|1:46:42-1:46:42|: "Solo eso, sí".

(T3) En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63).

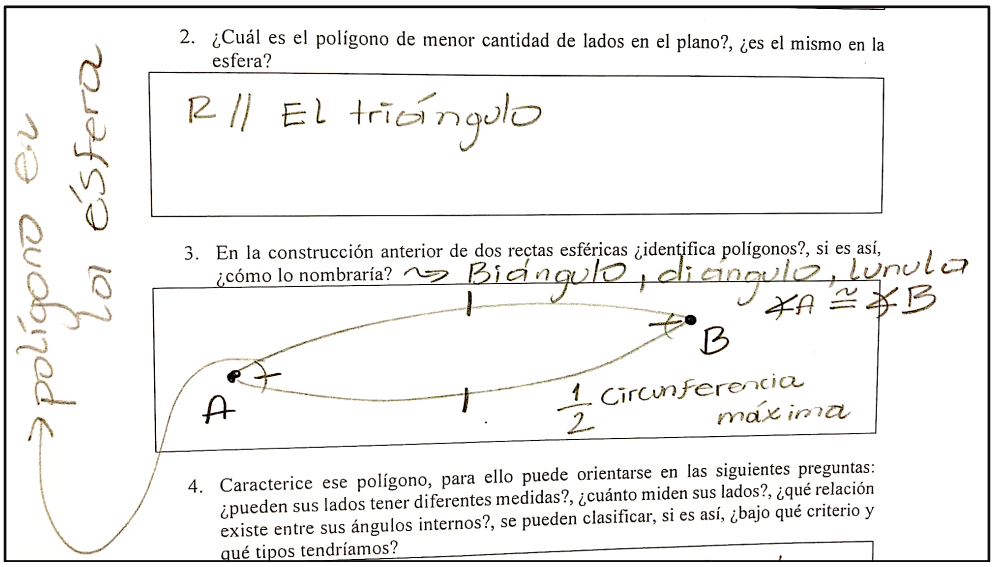


Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT.

(T4) El IP pregunta por la clasificación de los triángulos, el V-AP3-S2|1:53:12-1:53:15|: "Equiláteros, escalenos", el IP pregunta por el criterio de clasificación, el V-AP3-S2|1:53:19-1:53:20|: "Por la medida de sus lados y por la medida de sus ángulos", el IP les recuerda que sus lados siempre van a medir lo mismo, por lo que pregunta si tiene sentido una clasificación según sus lados; todo el grupo concluye que no. Al preguntar si podemos clasificarlos de alguna manera, el V-AP3-S2|1:54:34-1:54:35|: "Según el tamaño del ángulo".

En la DE, el V-AP3-S2|1:54:48-1:55:06|: "Yo me diría que los llamáramos agudos, rectos; rectos por si se intersecan en un ángulo recto, agudo si es menor de 90 grados", V-APa2-S2|1:54:55-1:55:13|: "Ángulos complementarios…, suplementarios", el V-AP3-S2|1:55:16-1:55:20|: "Ah, sí, podrían ser suplementarios". V-APa2-S2|1:56:16-1:56:16|: "Yo sugeriría por eso", el V-AP3-S2|1:56:20-1:56:22|: "Sí, [menciona el nombre de la

APa2] lo que decía es por suplemento", V-APa1-S2|1:56:23-1:57:03|: "Ah por el suplemento, es cierto, porque todos son 180, aunque no sabemos si aquí se mide en grados [el AP3 le dice que sí], ah si es cierto, si tenemos esto [señala el transportador esférico], es cierto, por el suplemento, entonces, este sería el complemento [el AP3 le dice: El suplemento], ah sí, porque estos los dos suman 180, son ángulos suplementarios", el V-AP3-S2|1:57:04-1:57:22|: "Pero siento que igual se podrían ver como ángulos [la APa2 dice: Adyacentes], también", V-APa1-S2|1:57:09-1:57:23|: "Pero los adyacentes también son suplementarios… pero este, este no es adyacente de este de acá", V-APa2-S2|1:57:24-1:57:42|: "Si es adyacente con este, ambos forman un ángulo de 180 grados, este con este forman 180, este con este 180, son el suplemento, para más finos vámonos por el suplemento".

En la DG, el IP pregunta si podemos tener biángulos mayores a 180 grados. El V-AP3-S2|2:09:48-2:09:48|: "Ah, sí", el IP hace una explicación de un posible biángulo mayor a 180 grados y todo el grupo menciona aceptarlo como biángulo. Al preguntar al equipo, V-APa1-S2|2:10:38-2:11:48|: "Suplementarios, vimos que, por ejemplo, comparamos este de aquí con este de aquí y vimos que, haciendo la relación con el plano, estos dos suman 180; bien, tomamos estos dos, podemos ver que según el criterio, según la medida de sus ángulos, ya vimos que de los lados no podemos porque tienen la misma congruencia, luego vemos que si unimos estos dos formamos 180 entonces podríamos decir que son suplementarios [la construcción del equipo se presenta en la figura 64], es como cuando tenemos ángulos suplementarios en el plano que suman 180 [el IP pregunta: aquí podríamos tener biángulos suplementarios], ajá, según lo que nosotros observamos, esa fue la relación que nosotros construímos [el IP pregunta: Tienen o se podrían tener complementarios], sí, ellos [señala la construcción del equipo B] hicieron rectos, ahí podrían haber complementarios". Ante la pregunta que hace el IP, si se podrían tener biángulos nulos, el V-AP3-S2|2:12:27-2:12:32|: "Yo le iba a preguntar eso, qué sucede si es el ecuador la única".

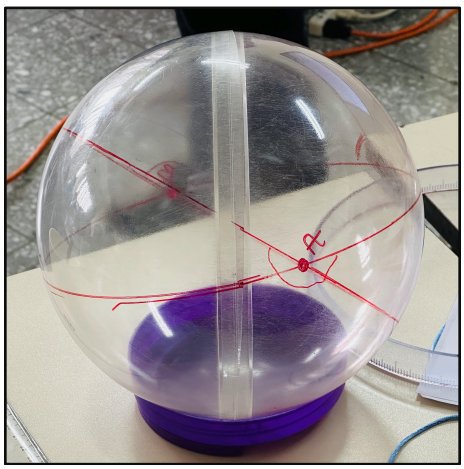


Figura 64. Construcción del equipo A. Fuente: Fotografía-sesión 2.

Equipo B:

(T1) V-BPa2-S2|1:33:48-1:33:57|: "Pero no solo por cuatro puntos, podría haber cinco [refiere a lo que sería un polígono]".

(T2) V-BPa3-S2|1:42:32-1:43:14|: “La respuesta del menor es el triángulo”, V-BPa2-S2|1:42:35-1:42:57|: “En el plano es el triángulo, pero está preguntando si es el mismo en la esfera, pero no, porque todo esto [la BPa3 dice que son meridianos], este coso, como el pedazo, como un gajo de una naranja, es un polígono y solo tiene dos y dos vértices. Entonces, el menor no es el triángulo en la esfera”. V-BPa2-S2|1:43:17-1:43:23|: “Pero el problema, supuestamente, un polígono debe tener por lo menos tres lados [generalización euclidiana], o ¿tiene tres lados?”, V-BPa3-S2|1:43:23-1:43:14|: “No, en el plano sí”, V-BPa2-S2|1:43:22-1:43:38|: “Es que en el plano, pero aquí solo tiene dos y esto ya es una región cerrada”. V-BPa2-S2|1:43:52-1:44:26|: “Por eso pidió la definición de polígono, …, en el plano es una figura plana cerrada con n lados, pero el mínimo es tres porque para que sea cerrada, en el plano, esta solo ocupa dos; entonces en el plano y en la esfera no es el mismo”.

En la DG, todos afirman que no es el mismo, V-BPa2-S2|1:44:58-1:44:58|: “Cómo se llama, no lo sabemos”. V-BP1-S2|1:47:30-1:47:31|: “Un sufijo para dos”. V-BPa2-S2|1:47:37-1:47:37|: “Duple-ángulo”, V-BPa3-S2|1:47:45-1:47:45|: “Dúo-ángulo”, V-BP1-S2|1:48:45-1:48:51|: “Por ejemplo, de hexágono, entonces podría ser biágono”.

(T4) El IP menciona que sus ángulos son congruentes entre ellos y pregunta si pueden variar, V-BP1-S2|1:53:37-1:53:37|: “Sí”. En la DE, el IP pregunta si le dieron un nombre, V-BPa2-S2|1:59:12-1:59:12|: “Biágono”, V-BP1-S2|1:59:24-1:59:42|: “Del nombre de hexágono, …, porque el hexágono es polígono y termina en ágono, por eso le pusimos así”. Al pensar en la clasificación, V-BP1-S2|2:00:00-2:00:07|: “Pero es que solo habrían dos, porque uno es el complemento, lo mismo que ellos [escuchó la discusión del equipo A]”. V-BP1-S2|2:00:19-2:00:36|: “Porque si este fuera más pequeño, sería el complemento del otro [BPa3: Sí]; el otro sería el complemento de este, pero cómo serían, ¿por qué solo esos dos serían?”. V-BPa3-S2|2:00:51-2:00:55|: “Si se pueden clasificar con dos lados y dos ángulos, podemos decir que son opuestos”. V-BP1-S2|2:01:00-2:01:14|: “Pero es que, por ejemplo, si yo tengo este, yo puedo hacer otro acá que sea más chiquito, y este no es necesariamente el complemento del otro, entonces ya no se cumple”. V-BP1-S2|2:01:20-2:01:39|: “[BPa2: El suplemento], nosotros lo estábamos pensando porque está así, o sea, estábamos pensando en este con este, es el que divide [BPa2: Usted puede que este es suplemento, decir que este y este es 80 grados]. Bueno, si lo mira como en el plano, sí, pero creo que la medida no es la misma acá”. V-BP1-S2|2:01:59-2:02:00|: “Es que se pueden clasificar solamente por los ángulos”, V-BPa3-S2|2:02:18-2:02:19|: “Aquí, aquí es un ángulo”, V-BP1-S2|2:02:22-2:03:09|: “Es que así como los triángulos, este es triángulo con el ángulo obtuso, y este es un triángulo con el ángulo agudo, y este es rectángulo [en sus HT dibuja las representaciones de los triángulos (ver figura 65)], [BPa3: Son los tres], pero así como este que son perpendiculares [refiere a su construcción en la esfera] este sería recto, entonces sería un biágono recto [BPa2: Sí, ya tenemos los nombres, ..., le salió natural]”, continúa diciendo, V-BP1-S2|2:03:15-2:03:21|: “Pero y los otros, biágono agudo, biágono obtuso, por la medida del ángulo”. En sus HT, la BPa2 presenta esta clasificación (ver figura 66).

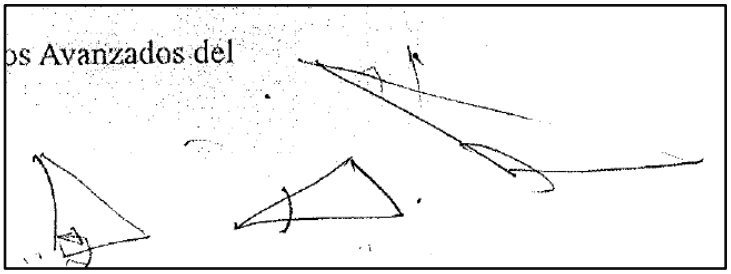


Figura 65. Representaciones de tipos de triángulos por BP1. Fuente: HT.

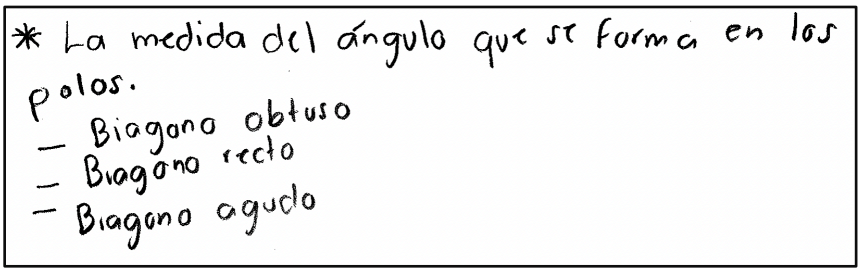


Figura 66. Respuesta de la T4 por BPa2. Fuente: HT.

En la DG, V-BP1-S2|2:08:12-2:09:11|: "Bueno, el criterio es la medida del ángulo, referente a los puntos a los polos, entonces la medida puede ser, bueno, pensando siempre en relacionarlos, ¿verdad?, con el plano, tenemos ángulos agudos, rectos y obtusos, entonces, de igual forma los clasificamos. Por ejemplo, nosotros aquí tenemos, nosotros dibujamos perpendiculares (ver figura 67), entonces en ese sentido, no sé si las medidas serán iguales, pero serían perpendiculares y podríamos decir que sería como un biágono recto, no sé, no sé si sería así, pero igual dependiendo de la medida del ángulo podría ser biángulo agudo, recto u obtuso". El IP pregunta si se pueden tener biágonos mayores a 180 grados; el equipo responde que no. La pregunta se extiende a todo el grupo.

Figura 67. Construcción de biágonos rectos por el equipo B. Fuente: Fotografía-Sesión 2.

Equipo C:

(T1) Después de la intervención del AP3, V-CPa3-S2|1:34:28-1:34:44|: "Estaba pensando que si iniciamos con el resumen diciendo que el triángulo era un polígono y el triángulo tiene tres lados, [AP3: por eso digo que

tres lados o más], ahí sí [complementa la caracterización que dio AP3, agregado que puede haber polígonos de tres lados]".

(T2) En la DE, el V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: "Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura". La V-CPa1-S2|1:36:42-1:37:49|: "Entonces, es el mismo en la esfera o no". El V-CP2-S2|1:36:46-1:36:14|: "No, porque… si nosotros tenemos esta figura, nosotros notamos que está cerrada… esta tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y este solo dos ángulos, dos lados y dos vértices". El V-CP2-S2|1:37:58-1:38:15|: "¿Cómo se llama este?, [menciona el nombre de CPa3], se acuerda la vez pasada, no me dijo usted que ya lo había visto… es un sector esférico, no, sería un arco esférico".

La V-CPa1-S2|1:38:42-1:38:49|: "¿Cómo lo nombraríamos? Yo lo nombraría du-cágono", el V-CP2-S2|1:38:49-1:38:55|: "Du-ángulo…, bilátero". La V-CPa3-S2|1:38:56-1:39:02|: "Sí, porque si el triángulo se llama triángulo porque tiene tres lados, entonces este se tendría que llamar así, o bi de dos".

En la DG, cuando el BP1 menciona que no sabe cómo se llama el polígono de menor cantidad de lados en la esfera, el V-CP2-S2|1:45:00-1:45:00|: "El biángulo". Al preguntar cómo es, V-CPa1-S2|1:45:07-1:45:49|: "Tiene dos lados y dos vértices y dos ángulos". El IP pregunta por qué lo nombraría biángulo, V-CP2-S2|1:45:33-1:45:33|: "Porque hay dos ángulos". Una de las notas del investigador-obervador describe este proceso (ver figura 68).

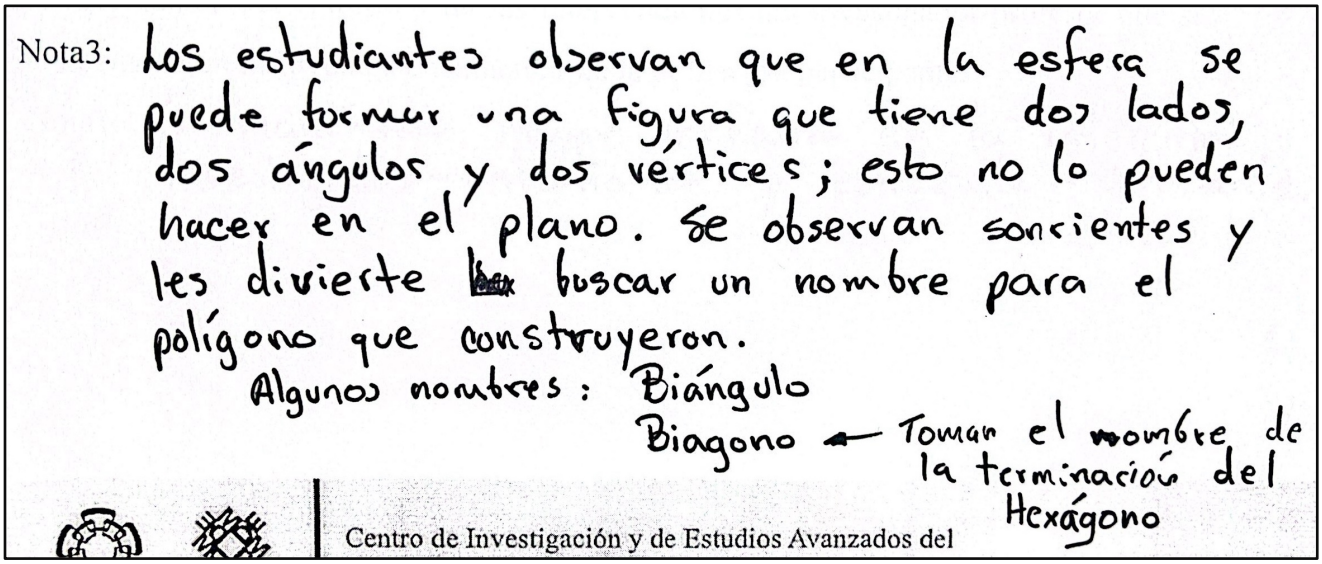


Figura 68. Nota de investigador-observador sobre el polígono de dos lados. Fuente: NIO.

(T4) Ante la pregunta, pueden sus lados tener diferentes medidas. El V-CP2-S2|1:52:00-1:52:00|: "No", el IP pregunta cuánto miden sus lados; todos los participantes están de acuerdo en que mide ½ o la mitad de una circunferencia máxima. Al preguntar por la relación entre sus ángulos internos, el V-CP2-S2|1:52:30-1:52:40|: "Son los mismos, no cambian de medida… son internos congruentes". Al preguntar si esos ángulos pueden variar, cambiar de medida juntos, el V-CP2-S2|1:53:44-1:53:44|: "No". El IP señala dos ángulos de dos lúnulas diferentes

y todo el grupo menciona que no; el IP hace una explicación en la que señala que dos ángulos internos de una lúnula son congruentes entre ellos, luego señala los ángulos internos de otra lúnula indicando que son congruentes entre ellos, pero que los ángulos de las dos lúnulas no son congruentes.

En la DE, V-CPa1-S2|2:03:33-2:03:49|: "Aquí solo tenemos dos, pero recordemos que si trazamos más vamos a tener", el V-CP2-S2|2:03:37-2:04:02|: "Pero veamos las características de estos, estos dos, qué me forman estos dos, una semi…, la mitad de la superficie de la esfera, bueno, la superficie de la esfera formada o la suma de ambas me va a formar toda la, me va a formar la semiesfera", continúa diciendo, el V-CP2-S2|2:04:13-2:04:19|: "Ajá, cómo van a ser estos ángulos, complementarios [refiere a suplementarios], entonces, regiones complementarias", la V-CPa3-S2|2:04:29-2:04:30|: "El complemento del otro". El V-CP2-S2|2:04:44-2:04:19|: "Ajá, pero la pregunta es se puede clasificar, región mayor y región menor, arco mayor y arco menor", V-CPa1-S2|2:04:53-2:04:59|: "Es que el problema es que no solo tendríamos estos dos, podríamos trazar más y tener más", V-CP2-S2|2:04:59-2:05:06|: "No, pero la figura está formada a partir de estas dos, de estos dos, esta es la menor", V-CPa1-S2|2:05:07-2:05:11|: "No [menciona el nombre de CP2], ahí podemos trazar más biángulos, ahí podemos tener más biángulos", V-CP2-S2|2:05:11-2:05:06|: "No, ciertamente, pero nosotros estamos analizando un biángulo", la V-CPa3-S2|2:05:16-2:05:27|: "Lo que [menciona a CPa1] le quiere dar a entender es que usted está generalizando solo para un biángulo, qué pasa si hacemos la otra, nos va a quedar casi la misma medida, a eso se refiere", V-CPa1-S2|2:05:29-2:05:34|: "Cómo los podemos clasificar, no solo enfocándonos en estos dos, sino que en todos los que se puedan tener", la V-CPa3-S2|2:05:37-2:05:46|: "Sí, exactamente". V-CPa1-S2|2:05:44-2:05:34|: "Los podríamos clasificar como se clasifican en el plano", el V-CP2-S2|2:05:49-2:05:52|: "Tengo una duda, pero ¿cómo sería un ángulo obtuso?", la V-CPa1-S2|2:05:54-2:05:58|: "Aquí trazamos otra; todo esto sería un obtuso".

V-CPa1-S2|2:06:04-2:06:06|: "Entonces tendríamos la misma clasificación que tenemos en el plano", el V-CP2-S2|2:06:07-2:06:53|: "Ajá, y sí es la misma, pero ahí ya no tendríamos una figura [alguien le señaló la semiesfera]. No entiendo por qué no podría haber llanos, porque entonces ya no formarían la figura, porque el llano sería la misma figura; la abertura del llano sería esta, pero ya no tendríamos una figura, porque estamos clasificando los ángulos de esta figura, entonces, por ejemplo, son suplementarios y van a ser un agudo y un obtuso, y habría uno especial que no es ni agudo ni obtuso, que sería recto", V-CPa1-S2|2:07:05-2:07:05|: "Estoy de acuerdo".

En la DG, V-CPa1-S2|2:12:02-2:07:05|: "Tenemos similar a la clasificación del equipo B, el agudo, solo que llamamos biagudo, bituso, birecto y bicavo". Esta clasificación la presenta en sus HT (ver figura 69). El IP pregunta si podríamos tener biángulos nulos. Cuando el AP3 pregunta por lo que sucede si el ecuador es la única recta, V-CP2-S2|2:12:33-2:12:35|: "Pero entonces no se formaría un polígono". El IP recuerda las características de un polígono que mencionaron antes; se problematiza la idea de un área nula.

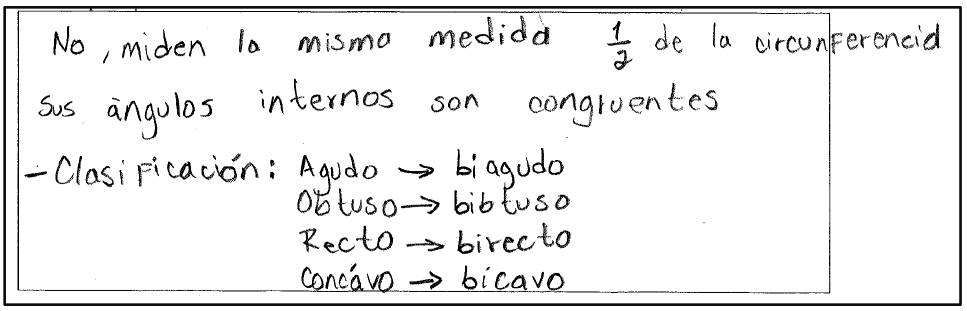
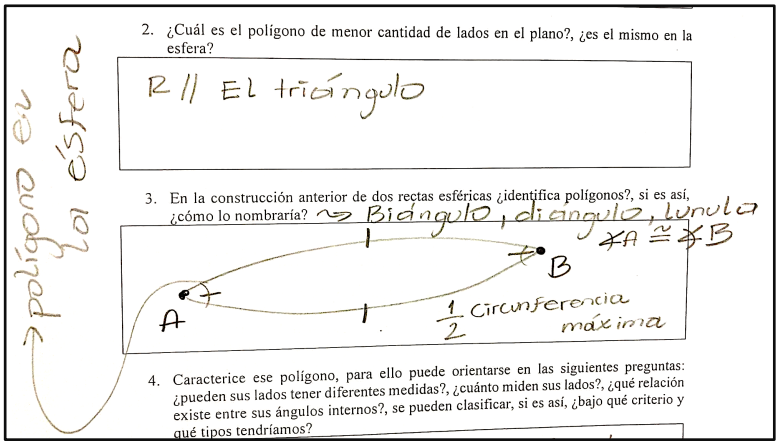
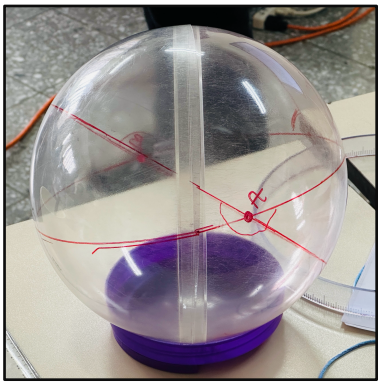


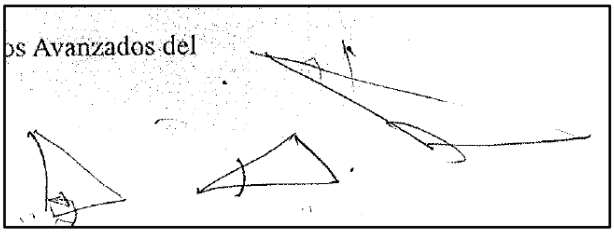
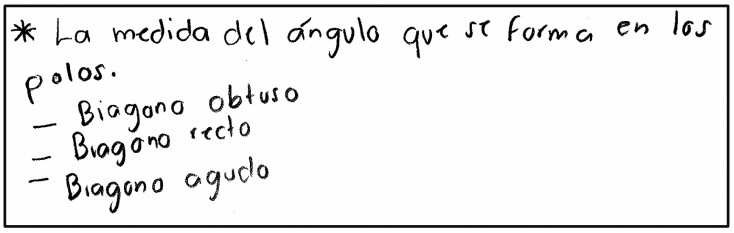
Figura 69. Respuesta de la T4 por CPa1. Fuente: HT.

5-1 Análisis de prácticas (acciones y actividades): parte V

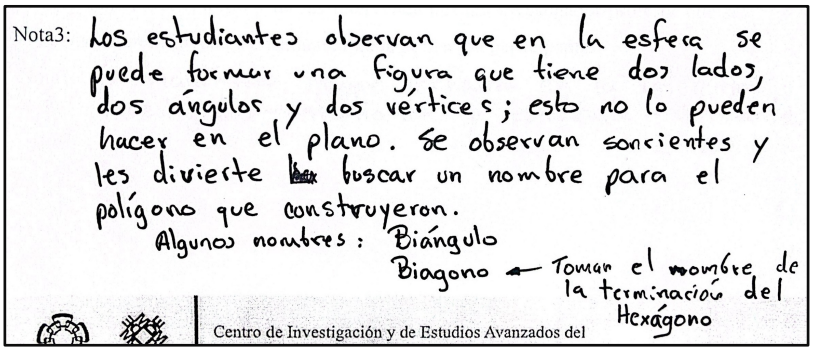
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Equipo A: (T1) Después de la intervención de BPa2, el IP le pregunta a AP3 sobre lo que piensa, el V-AP3-S2|1:34:00-1:34:13|: "Yo digo que un polígono es una figura que tiene más de tres lados y que al juntarse forman un área interna, tienen un área interna". (T2) Todo el grupo estuvo de acuerdo en que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano. En la DE, V-APa2-S2|1:39:21-1:39:24|: "Es que yo me acuerdo que como no hay paralelas no se podía", V-APa1-S2|1:39:29-1:39:31|: "El triángulo se puede porque esas no son paralelas", el V-AP3-S2|1:40:10-1:40:13|: "Sí, correcto, cuadrados no habrían", V-APa2-S2|1:40:15-1:40:27|: "Entonces el triángulo, ahí está la duda porque entonces sí se cortan los puntos, pero este vértice de aquí a acá, no es un triángulo o sí [está intentando dibujar un triángulo]". V-APa1-S2|1:40:56-1:40:59|: "Según un polígono, es una línea poligonal cerrada". El V-AP3-S2|1:40:59-1:41:23|: "Sí, pero no sé cómo sería un triángulo en la esfera, en la superficie de la esfera…, ahí es una figura de tres lados [algo que dibujó APa2]; en teoría, sí, todas las figuras de tres lados se llaman triángulos". El IP pregunta por qué se llama triángulo, el V-AP3-S2|1:41:25-1:41:26|: "Porque tiene tres lados y tres ángulos y tres vértices". El IP pregunta si el tercer lado del triángulo que construyeron lo hicieron con la regla esférica, todos responden que sí. IP: "Entonces, sí, es un segmento de recta esférica". Cuando el CP2 lo nombra como biángulo por la analogía del triángulo, el V-AP3-S2|1:46:10-1:46:13|: "Pero el cuadrado no es cuadrángulo". V-APa2-S2|1:46:38-1:40:27|: "Entonces esto de acá forma un polígono [señala una lúnula]", el V-AP3-S2|1:46:42-1:46:42|: "Solo eso, sí". (T3) En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63).  Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT.	**Exponen** que un polígono tiene un área interna. **Establecen** que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano. **Establecen** relaciones de dependencia (si no existen paralelas no se pueden construir cuadrados en la esfera). **Admiten** la inexistencia del cuadrado en la esfera. **Reconocen** que un polígono es una línea poligonal cerrada (segmentos de recta que forman un área). **Construyen** y **caracterizan** un triángulo en la esfera. **Reconocen** un polígono de dos lados en la esfera. **Nombran** el polígono de dos lados (biángulo, diángulo, lúnula). **Reconocen** que los ángulos internos de del biángulo son congruentes. **Notan** y **establecen** que los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima.	Caracterizando el polígono como una línea poligonal cerrada, es decir que forma un área. Bajo esa caracterización, reconociendo que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano, por lo que, al pensar en el polígono en la esfera, construyen un triángulo esférico. Por otro lado, describiendo que no deben existir cuadrados en la esfera, dado que no hay paralelas. Identificando polígonos de dos lados en la esfera y estudiando ese polígono reconoce sus propiedades y características.

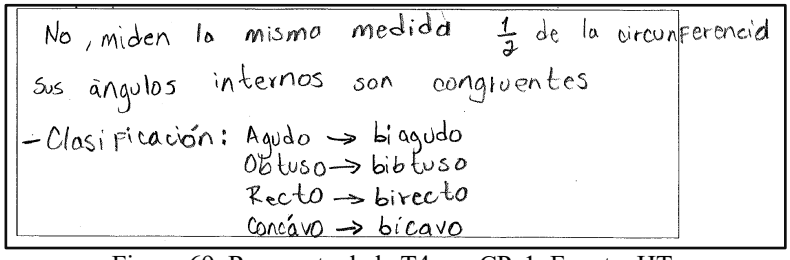
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
(T4) El IP pregunta por la clasificación de los triángulos, el V-AP3-S2|1:53:12-1:53:15|: "Equiláteros, escalenos", el IP pregunta por el criterio de clasificación, el V-AP3-S2|1:53:19-1:53:20|: "Por la medida de sus lados y por la medida de sus ángulos", el IP les recuerda que sus lados siempre van a medir lo mismo, por lo que pregunta si tiene sentido una clasificación según sus lados; todo el grupo concluye que no. Al preguntar si podemos clasificarlos de alguna manera, el V-AP3-S2|1:54:34-1:54:35|: "Según el tamaño del ángulo". En la DE, el V-AP3-S2|1:54:48-1:55:06|: "Yo me diría que los llamáramos agudos, rectos; rectos por si se intersecan en un ángulo recto, agudo si es menor de 90 grados", V-APa2-S2|1:54:55-1:55:13|: "Ángulos complementarios…, suplementarios", el V-AP3-S2|1:55:16-1:55:20|: "Ah, sí, podrían ser suplementarios". V-APa2-S2|1:56:16-1:56:16|: "Yo sugeriría por eso", el V-AP3-S2|1:56:20-1:56:22|: "Sí, [menciona el nombre de la APa2] lo que decía es por suplemento", V-APa1-S2|1:56:23-1:57:03|: "Ah por el suplemento, es cierto, porque todos son 180, aunque no sabemos si aquí se mide en grados [el AP3 le dice que sí], ah si es cierto, si tenemos esto [señala el transportador esférico], es cierto, por el suplemento, entonces, este sería el complemento [el AP3 le dice: El suplemento], ah sí, porque estos los dos suman 180, son ángulos suplementarios", el V-AP3-S2|1:57:04-1:57:22|: "Pero siento que igual se podrían ver como ángulos [la APa2 dice: Adyacentes], también", V-APa1-S2|1:57:09-1:57:23|: "Pero los adyacentes también son suplementarios… pero este, este no es adyacente de este de acá", V-APa2-S2|1:57:24-1:57:42|: "Si es adyacente con este, ambos forman un ángulo de 180 grados, este con este forman 180, este con este 180, son el suplemento, para más finos vámonos por el suplemento". En la DG, el IP pregunta si podemos tener biángulos mayores a 180 grados. El V-AP3-S2|2:09:48-2:09:48|: "Ah, sí", el IP hace una explicación de un posible biángulo mayor a 180 grados y todo el grupo menciona aceptarlo como biángulo. Al preguntar al equipo, V-APa1-S2|2:10:38-2:11:48|: "Suplementarios, vimos que, por ejemplo, comparamos este de aquí con este de aquí y vimos que, haciendo la relación con el plano, estos dos suman 180; bien, tomamos estos dos, podemos ver que según el criterio, según la medida de sus ángulos, ya vimos que de los lados no podemos porque tienen la misma congruencia, luego vemos que si unimos estos dos formamos 180 entonces podríamos decir que son suplementarios [la construcción del equipo se presenta en la figura 64], es como cuando tenemos ángulos suplementarios en el plano que suman 180 [el IP pregunta: aquí podríamos tener biángulos suplementarios], ajá, según lo que nosotros observamos, esa fue la relación que nosotros construímos [el IP pregunta: Tienen o se podrían tener complementarios], sí, ellos [señala la construcción del equipo B] hicieron rectos, ahí podrían haber complementarios". Ante la pregunta que hace el IP, si se	**Exponen** los criterios de clasificación de los triángulos. **Establecen** que el biángulo no se puede clasificar según la medida de los lados, solo según la medida de sus ángulos. **Clasifican** los biángulos según la medida de sus ángulos. **Relacionan** ángulos adyacentes e **identifican** ángulos complementarios y suplementarios. **Relacionan** biángulos adyacentes e **identifican** biángulos complementarios y suplementarios. **Suman** dos ángulos para formar 180 grados. **Admiten** que en la esfera también los ángulos se miden en grados. **Admiten** que existen biángulos mayores de 180 grados y biángulos nulos. **Trasladan** las relaciones de ángulos adyacentes del plano a la esfera. **Relacionan** ángulos adyacentes e **identifican** ángulos complementarios, suplementarios. **Relacionan** biángulos adyacentes e **identifican** biángulos	Describiendo la clasificación de los triángulos según la medida de sus lados y de sus ángulos. Dado que los lados del biángulo siempre tendrán el mismo tamaño, exponen que no tiene sentido la clasificación según la medida de sus lados, solo según sus ángulos. Discutiendo sobre la clasificación de los biángulos, se discuten dos clasificaciones, según la medida de sus ángulos internos (agudos, rectos, obtusos), y según la relación entre biángulos adyacentes (biángulos complementarios y suplementarios). Discutiendo en equipos sobre la existencia de biángulos llanos y nulos. Exponiendo que están analizando esas relaciones de ángulos en la esfera porque en el plano existen. Discutiendo sobre la clasificación de los biángulos, se discuten dos clasificaciones, según la medida de sus ángulos internos (agudos, rectos, obtusos), y según la

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
podrían tener biángulos nulos, el V-AP3-S2|2:12:27-2:12:32|: "Yo le iba a preguntar eso, qué sucede si es el ecuador la única".  Figura 64. Construcción del equipo A. Fuente: Fotografía-sesión 2.	complementarios y suplementarios.	relación entre biángulos adyacentes (biángulos complementarios y suplementarios).
Equipo B: (T1) V-BPa2-S2|1:33:48-1:33:57|: "Pero no solo por cuatro puntos, podría haber cinco [refiere a lo que sería un polígono]". (T2) V-BPa3-S2|1:42:32-1:43:14|: "La respuesta del menor es el triángulo", V-BPa2-S2|1:42:35-1:42:57|: "En el plano es el triángulo, pero está preguntando si es el mismo en la esfera, pero no, porque todo esto [la BPa3 dice que son meridianos], este coso, como el pedazo, como un gajo de una naranja, es un polígono y solo tiene dos y dos vértices. Entonces, el menor no es el triángulo en la esfera". V-BPa2-S2|1:43:17-1:43:23|: "Pero el problema, supuestamente, un polígono debe tener por lo menos tres lados [generalización euclidiana], o ¿tiene tres lados?", V-BPa3-S2|1:43:23-1:43:14|: "No, en el plano sí", V-BPa2-S2|1:43:22-1:43:38|: "Es que en el plano, pero aquí solo tiene dos y esto ya es una región cerrada". V-BPa2-S2|1:43:52-1:44:26|: "Por eso pidió la definición de polígono, …, en el plano es una figura plana cerrada con n lados, pero el mínimo es tres porque para que sea cerrada, en el plano, esta solo ocupa dos; entonces en el plano y en la esfera no es el mismo". En la DG, todos afirman que no es el mismo, V-BPa2-S2|1:44:58-1:44:58|: "Cómo se llama, no lo sabemos". V-BP1-S2|1:47:30-1:47:31|: "Un sufijo para dos". V-BPa2-S2|1:47:37-1:47:37|: "Duple-ángulo", V-BPa3-S2|1:47:45-1:47:45|: "Dúo-ángulo", V-BP1-S2|1:48:45-1:48:51|: "Por ejemplo, de hexágono, entonces podría ser biágono". (T4) El IP menciona que sus ángulos son congruentes entre ellos y pregunta si pueden variar, V-BP1-S2|1:53:37-1:53:37|: "Sí". En la DE, el IP pregunta si le dieron un nombre, V-BPa2-S2|1:59:12-1:59:12|: "Biágono", V-BP1-S2|1:59:24-1:59:42|: "Del nombre de hexágono, …, porque el hexágono es polígono y termina en ágono, por eso le pusimos así". Al pensar en la clasificación, V-BP1-S2|2:00:00-2:00:07|: "Pero es que solo habrían dos, porque uno es el complemento, lo mismo que ellos [escuchó la discusión del equipo A]". V-BP1-S2|2:00:19-2:00:36|: "Porque si este fuera más	**Establecen** que el polígono tiene tres o más vértices. **Exponen** que el polígono de menor cantidad de lados en el plano es el triángulo. **Identifican** un polígono de dos lados y dos vértices en la esfera. **Caracterizan** el polígono de dos lados (el coso, el pedazo, gajo de mandarina). **Problematizan** el significado de un polígono (debe tener mínimo tres lados y/o debe tener una región cerrada). **Diferencian** el plano y la esfera sobre el polígono de menor cantidad de lados. **Buscan** prefijos para dos (duple, dúo, bi). **Toman** al hexágono como ejemplo y **nombran** al polígono (biágono).	Caracterizando un polígono. Reconociendo que en la esfera dos lados rectos cierran una región de la superficie, por lo que, después de discutir sobre lo que es un polígono aceptan que en el plano el polígono de menor cantidad de lados es el triángulo y en la esfera es un polígono de dos lados. Dada la forma de ese polígono de dos lados, lo identifican en los gajos de las mandarinas. Reconociendo que el polígono tiene dos ángulos y dos lados. Discutiendo en su equipo sobre el nombre que podría tener ese polígono,

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
pequeño, sería el complemento del otro [BPa3: Sí]; el otro sería el complemento de este, pero cómo serían, ¿por qué solo esos dos serían?". V-BPa3-S2|2:00:51-2:00:55|: "Si se pueden clasificar con dos lados y dos ángulos, podemos decir que son opuestos". V-BP1-S2|2:01:00-2:01:14|: "Pero es que, por ejemplo, si yo tengo este, yo puedo hacer otro acá que sea más chiquito, y este no es necesariamente el complemento del otro, entonces ya no se cumple". V-BP1-S2|2:01:20-2:01:39|: "[BPa2: El suplemento], nosotros lo estábamos pensando porque está así, o sea, estábamos pensando en este con este, es el que divide [BPa2: Usted puede que este es suplemento, decir que este y este es 80 grados]. Bueno, si lo mira como en el plano, sí, pero creo que la medida no es la misma acá". V-BP1-S2|2:01:59-2:02:00|: "Es que se pueden clasificar solamente por los ángulos", V-BPa3-S2|2:02:18-2:02:19|: "Aquí, aquí es un ángulo", V-BP1-S2|2:02:22-2:03:09|: "Es que así como los triángulos, este es triángulo con el ángulo obtuso, y este es un triángulo con el ángulo agudo, y este es rectángulo [en sus HT dibuja las representaciones de los triángulos (ver figura 65)], [BPa3: Son los tres], pero así como este que son perpendiculares [refiere a su construcción en la esfera] este sería recto, entonces sería un biágono recto [BPa2: Sí, ya tenemos los nombres, ..., le salió natural]", continúa diciendo, V-BP1-S2|2:03:15-2:03:21|: "Pero y los otros, biágono agudo, biágono obtuso, por la medida del ángulo". En sus HT, la BPa2 presenta esta clasificación (ver figura 66).  Figura 65. Representaciones de tipos de triángulos por BP1. Fuente: HT.  Figura 66. Respuesta de la T4 por BPa2. Fuente: HT.	**Clasifican** al biágono relacionando ángulos complementarios y suplementarios. **Identifican** biágono opuestos por el vértice. **Establecen** que solo pueden clasificarlos según sus ángulos. **Reconocen** que hay relaciones entre dos ángulos que no son complementarios y no son suplementarios. **Establecen** la clasificación de los triángulos planos según la medida de sus ángulos. **Trasladan** la clasificación de los triángulos según sus ángulos a los biágonos.	lo terminan nombrando biágono. Luego piensan en la clasificación de ese polígono según la medida de sus ángulos, donde reconocen dos clasificaciones, al relacionar dos biágonos (identifican biágonos opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios), y según la medida de sus ángulos internos (biágonos agudos, biágonos rectos y biángulos obtusos).
En la DG, V-BP1-S2|2:08:12-2:09:11|: "Bueno, el criterio es la medida del ángulo, referente a los puntos a los polos, entonces la medida puede ser, bueno, pensando siempre en relacionarlos, ¿verdad?, con el plano, tenemos ángulos agudos, rectos y obtusos, entonces, de igual forma los clasificamos. Por ejemplo, nosotros aquí tenemos, nosotros dibujamos perpendiculares (ver figura 67), entonces en ese sentido, no sé si las	**Establecen** a la medida de los ángulos internos como criterio de clasificación. **Trasladan** la clasificación de los triángulos del plano	Relacionan la clasificación de los triángulos en el plano según la medida de sus ángulos con la

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
medidas serán iguales, pero serían perpendiculares y podríamos decir que sería como un biágono recto, no sé, no sé si sería así, pero igual dependiendo de la medida del ángulo podría ser biángulo agudo, recto u obtuso". El IP pregunta si se pueden tener biágonos mayores a 180 grados; el equipo responde que no. La pregunta se extiende a todo el grupo. Figura 67. Construcción de biágonos rectos por el equipo B. Fuente: Fotografía-Sesión 2.	a los biágonos en la esfera. **Construyen** biágonos rectos.	clasificación de los biágonos en la esfera. De ahí deducen que hay biágonos agudos, rectos y obtusos.
Equipo C:		
(T1) Después de la intervención del AP3, V-CPa3-S2|1:34:28-1:34:44|: "Estaba pensando que si iniciamos con el resumen diciendo que el triángulo era un polígono y el triángulo tiene tres lados, [AP3: por eso digo que tres lados o más], ahí sí [complementa la caracterización que dio AP3, agregado que puede haber polígonos de tres lados]".	**Establecen** que el polígono tiene tres o más lados.	Caracterizando al polígono.
(T2) En la DE, el V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: "Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura". La V-CPa1-S2|1:36:42-1:37:49|: "Entonces, es el mismo en la esfera o no". El V-CP2-S2|1:36:46-1:36:14|: "No, porque… si nosotros tenemos esta figura, nosotros notamos que está cerrada… esta tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y este solo dos ángulos, dos lados y dos vértices". El V-CP2-S2|1:37:58-1:38:15|: "¿Cómo se llama este?, [menciona el nombre de CPa3], se acuerda la vez pasada, no me dijo usted que ya lo había visto… es un sector esférico, no, sería un arco esférico". La V-CPa1-S2|1:38:42-1:38:49|: "¿Cómo lo nombraríamos? Yo lo nombraría du-cágono", el V-CP2-S2|1:38:49-1:38:55|: "Du-ángulo…, bilátero". La V-CPa3-S2|1:38:56-1:39:02|: "Sí, porque si el triángulo se llama triángulo porque tiene tres lados, entonces este se tendría que llamar así, o bi de dos". En la DG, cuando el BP1 menciona que no sabe cómo se llama el polígono de menor cantidad de lados en la esfera, el V-CP2-S2|1:45:00-1:45:00|: "El biángulo". Al	**Establecen** que un polígono es una figura cerrada. **Identifican** una figura formada por dos lados rectos que encierra una región de la superficie. **Descomponen** la figura señalando sus elementos. **Caracterizan** al polígono de dos lados (sector esférico, arco esférico). **Buscan** prefijos que significan dos, para nombrar al polígono. **Nombran** al polígono de dos lados.	Problematizando la caracterización de polígono, reconocen que hay un polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices en la esfera. Piensan en sus características y con ellas buscan posibles nombres para el polígono.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
preguntar cómo es, V-CPa1-S2|1:45:07-1:45:49|: "Tiene dos lados y dos vértices y dos ángulos". El IP pregunta por qué lo nombraría biángulo, V-CP2-S2|1:45:33-1:45:33|: "Porque hay dos ángulos". Una de las notas del investigador-obervador describe este proceso (ver figura 68).  Figura 68. Nota de investigador-observador sobre el polígono de dos lados. Fuente: NIO.	**Descomponen** al biángulo.	Señalando los elementos que componen al polígono.
(T4) Ante la pregunta, pueden sus lados tener diferentes medidas. El V-CP2-S2|1:52:00-1:52:00|: "No", el IP pregunta cuánto miden sus lados; todos los participantes están de acuerdo en que mide ½ o la mitad de una circunferencia máxima. Al preguntar por la relación entre sus ángulos internos, el V-CP2-S2|1:52:30-1:52:40|: "Son los mismos, no cambian de medida… son internos congruentes". Al preguntar si esos ángulos pueden variar, cambiar de medida juntos, el V-CP2-S2|1:53:44-1:53:44|: "No". El IP señala dos ángulos de dos lúnulas diferentes y todo el grupo menciona que no; el IP hace una explicación en la que señala que dos ángulos internos de una lúnula son congruentes entre ellos, luego señala los ángulos internos de otra lúnula indicando que son congruentes entre ellos, pero que los ángulos de las dos lúnulas no son congruentes.	**Establecen** que los lados de los biángulos son constantes, miden una semicircunferencia. **Establecen** que los ángulos internos del biángulo son congruentes.	Analizando el polígono de dos lados logran reconocer que sus medidas no cambian, siempre son una semicircunferencia, además que sus ángulos internos son congruentes.
En la DE, V-CPa1-S2|2:03:33-2:03:49|: "Aquí solo tenemos dos, pero recordemos que si trazamos más vamos a tener", el V-CP2-S2|2:03:37-2:04:02|: "Pero veamos las características de estos, estos dos, qué me forman estos dos, una semi…, la mitad de la superficie de la esfera, bueno, la superficie de la esfera formada o la suma de ambas me va a formar toda la, me va a formar la semiesfera", continúa diciendo, el V-CP2-S2|2:04:13-2:04:19|: "Ajá, cómo van a ser estos ángulos, complementarios [refiere a suplementarios], entonces, regiones complementarias", la V-CPa3-S2|2:04:29-2:04:30|: "El complemento del otro". El V-CP2-S2|2:04:44-2:04:19|: "Ajá, pero la pregunta es se puede clasificar, región mayor y región menor, arco mayor y arco menor", V-CPa1-S2|2:04:53-2:04:59|: "Es que el problema es que no solo tendríamos estos dos, podríamos trazar más y tener más", V-CP2-S2|2:04:59-2:05:06|: "No, pero la figura está formada a partir de estas dos, de estos dos, esta es la menor", V-CPa1-S2|2:05:07-2:05:11|: "No [menciona el nombre de CP2], ahí podemos trazar más biángulos, ahí podemos tener más biángulos", V-CP2-S2|2:05:11-2:05:06|: "No, ciertamente, pero nosotros estamos analizando un biángulo", la V-CPa3-S2|2:05:16-2:05:27|: "Lo que	**Consideran** dos biángulos como ejemplos. **Reconocen** que dos biángulos forman una semiesfera. **Suman** dos biángulos. **Establecen** sus ángulos son suplementarios, por lo que las regiones serían complementarias. **Clasifican** los biángulos según su área, región mayor y región menor o arco mayor y menor. **Reconocen** que necesitan construir	Como en su construcción solo tienen dos biángulos, inicialmente los usan como modelos para clasificarlos, ahí reconocen ángulos suplementarios por lo que habrían biángulos suplementarios. Sin embargo, notan que para clasificarlos necesitan construir más biángulos, por lo que trasladan la clasificación de los triángulos planos según la medida de sus ángulos a los

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
[menciona a CPa1] le quiere dar a entender es que usted está generalizando solo para un biángulo, qué pasa si hacemos la otra, nos va a quedar casi la misma medida, a eso se refiere", V-CPa1-S2|2:05:29-2:05:34|: "Cómo los podemos clasificar, no solo enfocándonos en estos dos, sino que en todos los que se puedan tener", la V-CPa3-S2|2:05:37-2:05:46|: "Sí, exactamente". V-CPa1-S2|2:05:44-2:05:34|: "Los podríamos clasificar como se clasifican en el plano", el V-CP2-S2|2:05:49-2:05:52|: "Tengo una duda, pero ¿cómo sería un ángulo obtuso?", la V-CPa1-S2|2:05:54-2:05:58|: "Aquí trazamos otra; todo esto sería un obtuso". V-CPa1-S2|2:06:04-2:06:06|: "Entonces tendríamos la misma clasificación que tenemos en el plano", el V-CP2-S2|2:06:07-2:06:53|: "Ajá, y sí es la misma, pero ahí ya no tendríamos una figura [alguien le señaló la semiesfera]. No entiendo por qué no podría haber llanos, porque entonces ya no formarían la figura, porque el llano sería la misma figura; la abertura del llano sería esta, pero ya no tendríamos una figura, porque estamos clasificando los ángulos de esta figura, entonces, por ejemplo, son suplementarios y van a ser un agudo y un obtuso, y habría uno especial que no es ni agudo ni obtuso, que sería recto", V-CPa1-S2|2:07:05-2:07:05|: "Estoy de acuerdo". En la DG, V-CPa1-S2|2:12:02-2:07:05|: "Tenemos similar a la clasificación del equipo B, el agudo, solo que llamamos biagudo, bituso, birecto y bicavo". Esta clasificación la presenta en sus HT (ver figura 69). El IP pregunta si podríamos tener biángulos nulos. Cuando el AP3 pregunta por lo que sucede si el ecuador es la única recta, V-CP2-S2|2:12:33-2:12:35|: "Pero entonces no se formaría un polígono". El IP recuerda las características de un polígono que mencionaron antes; se problematiza la idea de un área nula.  Figura 69. Respuesta de la T4 por CPa1. Fuente: HT.	más biángulos para poder clasificarlos. **Trasladan** la clasificación de los triángulos planos según la medida de sus ángulos a la clasificación de los biángulos. **Construyen** un biángulo obtuso. **Clasifican** los biángulos según la medida de sus ángulos internos. **Rechazan** la existencia de un biángulo llano (mencionando que no se formaría una figura). **Relacionan** biángulos. **Nombran** los tipos de biángulos según su medida. **Problematizan** la existencia del biángulo nulo y llano.	biángulos en la esfera (agudo, recto y obtuso). Cuestionando la existencia de biángulo llanos, dado que no identifican una figura. Reconociendo que los biángulos se puede clasificar según la media de sus ángulos internos; y según su relación, ángulos suplementarios.

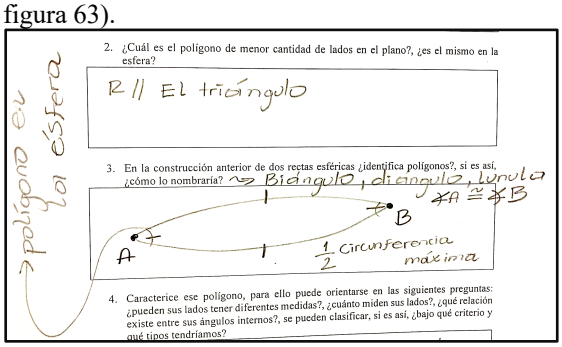
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
Establecen propiedades de un polígono (tres o más lados rectos, encierra una región de la superficie); establecen que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano; problematizan el significado de un polígono (debe tener mínimo tres lados y/o debe tener una región cerrada); identifican un polígono de dos lados en la esfera; descomponen la figura señalando sus elementos; caracterizan el polígono de dos lados (el coso, el pedazo, gajo de mandarina, sector esférico, arco esférico); buscan prefijos para dos (duple, dúo, bi, du); toman al hexágono como ejemplo; nombran el polígono de dos lados (biángulo, diángulo, diágono, du-cágono, bilátero, lúnula); notan y establecen que los lados del biángulo son constantes, miden una semicircunferencia máxima; notan y establecen que sus ángulos internos son congruentes; **para reconocer propiedades del biángulo (polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices; los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima; sus ángulos internos son congruentes).**

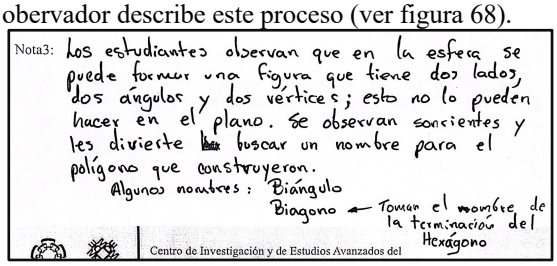
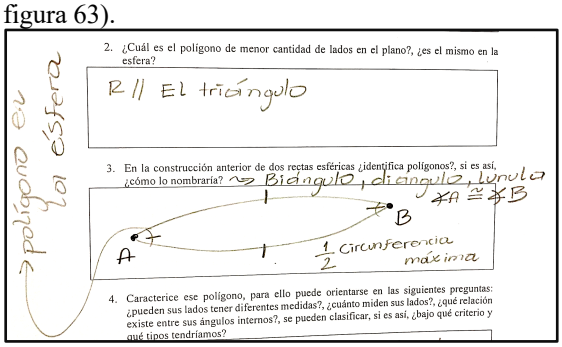
Exponen los criterios de clasificación de los triángulos; establecen que el biángulo no se puede clasificar según la medida de los lados, porque siempre miden lo mismo; admiten que en la esfera también los ángulos se miden en grados; consideran dos biángulos como ejemplos; identifican biángulos opuestos por el vértice; trasladan las relaciones de ángulos adyacentes y la clasificación del triángulo según la medida de sus ángulos del plano a la esfera; relacionan ángulos adyacentes e identifican ángulos complementarios y suplementarios; relacionan biángulos adyacentes e identifican biángulos complementarios y suplementarios; establecen la medida de los ángulos internos como criterio de clasificación; construyen algunos tipos de biángulos según la medida de sus ángulos internos (agudos, rectos y obtusos); problematizan la existencia del biángulo nulo y llano; **para clasificar los biángulos (según su área: región mayor y región menor; según se relación con otro biángulos: biángulos opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios; según la medida de sus ángulos internos: agudos, rectos, obtusos y cóncavos).**

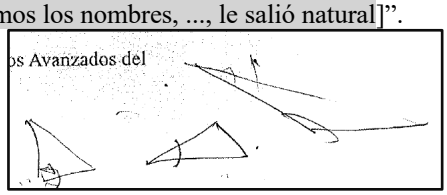
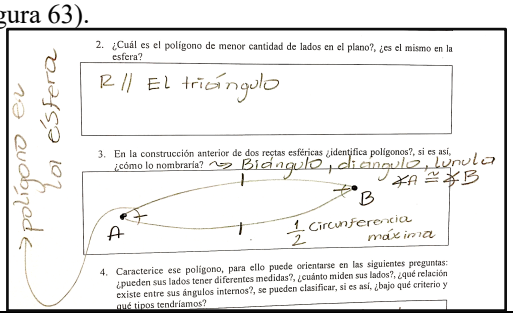
2-2 Análisis de usos: parte V

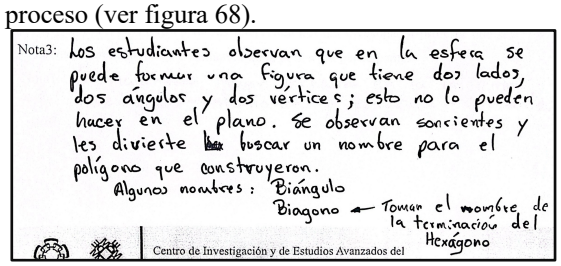
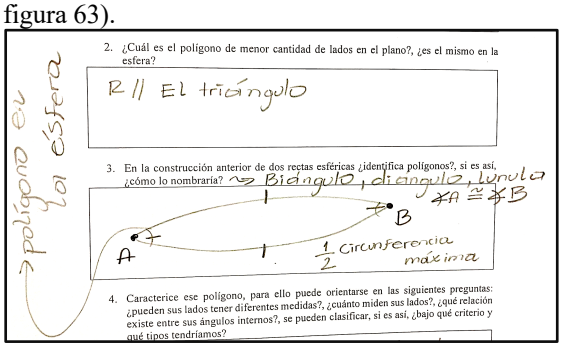
En el papel que desempeña la noción matemática en la tarea se hará una distinción entre el plano [p] y la esfera [E]. En la tabla anterior (análisis de acciones y actividades), se marcarán las acciones y actividades donde estén involucradas las nociones matemáticas de interés.

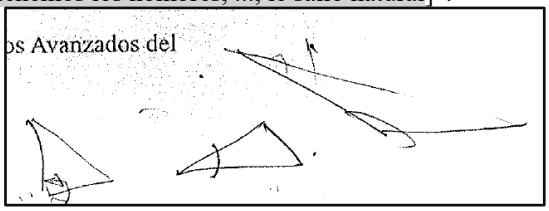
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Recta y segmento de recta plano y esférico			
En las acciones	Establecen propiedades de un polígono (tres o más lados rectos, encierra una región de la superficie).	V-AP3-S2|1:34:00-1:34:13|: "Yo digo que un polígono es una figura que tiene más de tres lados y que al juntarse forman un área interna, tienen un área interna". V-BPa2-S2|1:33:48-1:33:57|: "Pero no solo por cuatro puntos, podría haber cinco [refiere a lo que sería un polígono]".	Describen que los polígonos tienen tres o más lados, unen los lados de los polígonos formando un área interna.	Segmento como **elemento compositor de un polígono** [P, E].
		V-CPa3-S2|1:34:28-1:34:44|: "Estaba pensando que si iniciamos con el resumen diciendo que el triángulo era un polígono y el triángulo tiene tres lados, [AP3: por eso digo que tres lados o más], ahí sí [complementa la caracterización que dio AP3, agregado que puede haber polígonos de tres lados]".	Describen que el triángulo está formado por tres lados por ello, describe que el polígono tiene mínimo tres lados.	Segmento como **argumento en la caracterización** de otra noción geométrica [P, E].
		En la DE, el V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: "Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura".	Unen los lados de un polígno encerrando un espacio de la superficie, es una figura cerrada. Aceptan que en la esfera dos lados encierran un área interna.	P**or lo menos tres segmentos forman un área interna** [P]. P**or lo menos dos segmentos forman un área interna** [E].
	Establecen que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano.	Todo el grupo estuvo de acuerdo en que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano. V-BPa3-S2|1:42:32-1:43:14|: "La respuesta del menor es el triángulo", V-BPa2-S2|1:42:35-1:42:57|: "En el plano es el triángulo, pero está preguntando si es el mismo en la esfera, pero no, porque todo esto [la BPa3 dice que son meridianos], este coso, como el pedazo, como un gajo de una naranja, es un polígono y solo tiene dos y dos vértices. Entonces, el menor no es el triángulo en la esfera".	Unen segmentos para formar un área interna con la menor cantidad de lados. Relacionan dos segmentos de recta con los meridiano. Relacionan la figura formada por dos lados rectos con los gajos de una mandarina. Aceptan que en la esfera dos lados encierran un área interna.	P**or lo menos tres segmentos forman un área interna** [P]. P**or lo menos dos segmentos forman un área interna** [E]. El **segmento en contexto** (meridianos, forma de gajos de mandarinas) [E].
	Problematizan el significado de un polígono (debe tener mínimo tres lados y/o debe tener una región cerrada).	V-AP3-S2|1:40:10-1:40:13|: "Sí, correcto, cuadrados no habrían", V-APa2-S2|1:40:15-1:40:27|: "Entonces el triángulo, ahí está la duda porque entonces sí se cortan los puntos, pero este vértice de aquí a acá, no es un triángulo o sí [está intentando dibujar un triángulo]". V-APa1-S2|1:40:56-1:40:59|: "Según un polígono, es una línea poligonal cerrada". El V-AP3-S2|1:40:59-1:41:23|: "Sí, pero no sé cómo sería un triángulo en la esfera, en la superficie de la esfera…, ahí es una figura de tres lados [algo que dibujó APa2]; en	Comentan que no habrían cuadrados ya que no hay rectas paralelas en la esfera. Señalan que los lados tienen extremos. Construyen un triángulo juntando tres segmentos. Juntan tres o más segmentos para formar una línea polinomial (que encierra un área).	**Inexistencia del paralelismo** en la esfera [E]. Los **segmentos tienen extremos** [P, E]. P**or lo menos tres segmentos forman un área interna** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		teoría, sí, todas las figuras de tres lados se llaman triángulos". V-BPa2-S2|1:43:17-1:43:23|: "Pero el problema, supuestamente, un polígono debe tener por lo menos tres lados [generalización euclidiana], o ¿tiene tres lados?", V-BPa3-S2|1:43:23-1:43:14|: "No, en el plano sí", V-BPa2-S2|1:43:22-1:43:38|: "Es que en el plano, pero aquí solo tiene dos y esto ya es una región cerrada". V-BPa2-S2|1:43:52-1:44:26|: "Por eso pidió la definición de polígono, …, en el plano es una figura plana cerrada con n lados, pero el mínimo es tres porque para que sea cerrada, en el plano, esta solo ocupa dos; entonces en el plano y en la esfera no es el mismo". V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: "Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura". La V-CPa1-S2|1:36:42-1:37:49|: "Entonces, es el mismo en la esfera o no". El V-CP2-S2|1:36:46-1:36:14|: "No, porque… si nosotros tenemos esta figura, nosotros notamos que está cerrada… esta tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y este solo dos ángulos, dos lados y dos vértices".	Caracterizan el triángulo como una figura formada por tres segmentos. Establecen que un polígono debe mantener mínimos tres lados, pero reconocen que eso solo se cumple en el plano, porque en la esfera solo dos lados encierran una región. Describen que para que la figura sea cerrada debe tener mínimo tres lados en el plano. Reconocen que en la esfera solo dos lados encierran una región. Forman una figura en la esfera con dos lados y un triángulo en el plano con tres lados. Descomponen las figuras de menor cantidad de lados señalando cada uno de sus elementos.	El segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P, E]. **Por lo menos dos segmentos forman un área interna** [E].
	Identifican un polígono de dos lados en la esfera. Descomponen la figura señalando sus elementos. Caracterizan el polígono de dos lados (el coso, el pedazo, gajo de mandarina, sector esférico, arco esférico).	V-APa2-S2|1:46:38-1:40:27|: "Entonces esto de acá forma un polígono [señala una lúnula]", el V-AP3-S2|1:46:42-1:46:42|: "Solo eso, sí". En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63).  Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT. V-BPa2-S2|1:42:35-1:42:57|: "En el plano es el triángulo, pero está preguntando si es el mismo en la esfera, pero no, porque todo esto [la BPa3 dice que son meridianos], este coso, como el pedazo, como un gajo de una naranja, es un polígono y solo tiene dos y dos vértices. Entonces, el menor no es el triángulo en la esfera". V-BPa2-S2|1:43:17-1:43:23|: "Pero el problema, supuestamente, un polígono debe tener por lo menos tres lados [generalización euclidiana], o ¿tiene tres lados?", V-BPa3-S2|1:43:23-1:43:14|: "No, en el plano sí", V-BPa2-S2|1:43:22-1:43:38|:	Señalan dos segmentos de recta que encierran un área. Construyen la representación en sus HT (plano) de un polígono de dos lados en la esfera. Señalan que los dos lados son congruntes y que mide ½ de circunferencia máxima. Relacionan los lados del polígono con los meridianos. Reconocen que hay un polígono de dos lados. Mencionan que un polígo debe tener por lo menos tres lados, y se cuestionan que el polígono descubierto en la esfera tiene dos lados.	**Por lo menos dos segmentos forman un área interna** [E]. El segmento es un **elemento compositor** de un polígono [P, E]. Es un **argumento** (por ser congruentes) **en propiedades** de un polígono [E]. La **semicircunferencia máxima como el lado del polígono** de dos lados [E]. El **segmento en contexto** (meridianos, forma de gajos de mandarinas) [E]. **Por lo menos dos segmentos forman un área interna** [E]. **Por lo menos tres segmentos forman un área interna** [P].

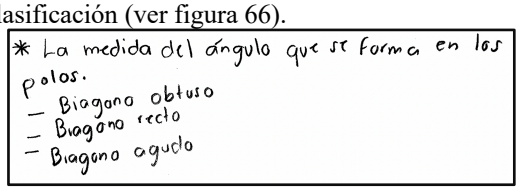
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		"Es que en el plano, pero aquí solo tiene dos y esto ya es una región cerrada". V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: "Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura". La V-CPa1-S2|1:36:42-1:37:49|: "Entonces, es el mismo en la esfera o no". El V-CP2-S2|1:36:46-1:36:14|: "No, porque… si nosotros tenemos esta figura, nosotros notamos que está cerrada… esta tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y este solo dos ángulos, dos lados y dos vértices".	Reconocen que hay un polígono de dos lados.	
	Nombran el polígono de dos lados (biángulo, diángulo, diágono, du-cágono, bilátero, lúnula).	V-CP2-S2|1:38:49-1:38:55|: "Du-ángulo…, bilátero". La V-CPa3-S2|1:38:56-1:39:02|: "Sí, porque si el triángulo se llama triángulo porque tiene tres lados, entonces este se tendría que llamar así, o bi de dos". En la DG, cuando el BP1 menciona que no sabe cómo se llama el polígono de menor cantidad de lados en la esfera, el V-CP2-S2|1:45:00-1:45:00|: "El biángulo". Al preguntar cómo es, V-CPa1-S2|1:45:07-1:45:49|: "Tiene dos lados y dos vértices y dos ángulos". El IP pregunta por qué lo nombraría biángulo, V-CP2-S2|1:45:33-1:45:33|: "Porque hay dos ángulos". Una de las notas del investigador-obervador describe este proceso (ver figura 68).  Nota3: Los estudiantes observan que en la esfera se puede formar una figura que tiene dos lados, dos ángulos y dos vértices; esto no lo pueden hacer en el plano. Se observan sonrientes y les divierte buscar un nombre para el polígono que construyeron. Algunos nombres: Biángulo Biagono ← Toman el nombre de la terminación del Hexágono Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Figura 68. Nota de investigador-observador sobre el polígono de dos lados. Fuente: NIO.	La cantidad de lados es el fundamento para nombrar bilátero al polígono de dos lados. Reconocen que exixten un polígono de dos lados en la esfera y ese es el polígono de menor cantidad de lados que se pueden formar en la esfera.	Segmentos como el **argumento para nombrar** otra noción geométrica [E]. **Por lo menos dos segmentos forman un área interna** [E]. El segmento como **elementos compositor** de un polígono [P, E].
	Notan y establecen que los lados del biángulo son constantes, miden una semicircunferencia máxima. Establecen que el biángulo no se puede clasificar según la	En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63).  2. ¿Cuál es el polígono de menor cantidad de lados en el plano?, ¿es el mismo en la esfera? R // El triángulo 3. En la construcción anterior de dos rectas esféricas ¿identifica polígonos?, si es así, ¿cómo lo nombraría? → Biángulo, diángulo, lúnula ∡A ≅ ∡B A B 1/2 circunferencia máxima 4. Caracterice ese polígono, para ello puede orientarse en las siguientes preguntas: ¿pueden sus lados tener diferentes medidas?, ¿cuánto miden sus lados?, ¿qué relación existe entre sus ángulos internos?, se pueden clasificar, si es así, ¿bajo qué criterio y qué tipos tendríamos? → polígono en la esfera Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT. V-BP1-S2|2:01:59-2:02:00|: "Es que se pueden clasificar solamente por los ángulos".	Construyen la representación en sus HT (plano) de un polígono de dos lados en la esfera. Señalan que los dos lados son congruntes y que mide ½ de circunferencia máxima. Reconocen que los lados de todos los biángulos van a	El segmento es un **elemento compositor** de un polígono [P, E]. Es un **argumento** (por ser congruentes) **en propiedades** de un polígono [E]. La **semicircunferencia máxima como el lado del polígono** de dos lados [E]. La **semicircunferencia máxima como el lado**

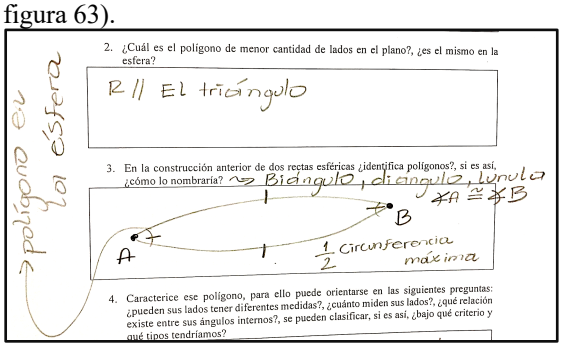
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	medida de los lados, porque siempre miden lo mismo.	Ante la pregunta, pueden sus lados tener diferentes medidas. El V-CP2-S2|1:52:00-1:52:00|: "No", el IP pregunta cuánto miden sus lados; todos los participantes están de acuerdo en que mide ½ o la mitad de una circunferencia máxima.	medir una semicircunferencia máxima, por ello no tiene sentido clasificarlos según sus lados.	**del polígono** de dos lados [E]. El **segmento estático** o como una **cantidad estática (**siendo el lado de un biángulo).
	Exponen los criterios de clasificación de los triángulos.	El IP pregunta por la clasificación de los triángulos, el V-AP3-S2|1:53:12-1:53:15|: "Equiláteros, escalenos", el IP pregunta por el criterio de clasificación, el V-AP3-S2|1:53:19-1:53:20|: "Por la medida de sus lados y por la medida de sus ángulos". V-BP1-S2|2:02:22-2:03:09|: "Es que así como los triángulos, este es triángulo con el ángulo obtuso, y este es un triángulo con el ángulo agudo, y este es rectángulo [en sus HT dibuja las representaciones de los triángulos (ver figura 65)], [BPa3: Son los tres], pero así como este que son perpendiculares [refiere a su construcción en la esfera] este sería recto, entonces sería un biágono recto [BPa2: Sí, ya tenemos los nombres, ..., le salió natural]".	Describen que los triángulos en el plano puede se equilateros y escalenos.	La **congruencia de segmentos como criterio de clasificación** de polígnos [P].
		 Figura 65. Representaciones de tipos de triángulos por BP1. Fuente: HT.	Reconocen que trazaron rectas perpendiculares en la esfera, por lo que tendrían un biángulo recto.	**Relación entre rectas-perpendicularidad** [E].
	Ángulo plano y esférico			
	Problematizan el significado de un polígono (debe tener mínimo tres lados y/o debe tener una región cerrada).	V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: "Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura". La V-CPa1-S2|1:36:42-1:37:49|: "Entonces, es el mismo en la esfera o no". El V-CP2-S2|1:36:46-1:36:14|: "No, porque… si nosotros tenemos esta figura, nosotros notamos que está cerrada… esta tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y este solo dos ángulos, dos lados y dos vértices".	Identifican que en la esfera hay dos intersecciones, dos vértices de ese polígono.	**Ángulo como un punto** [P, E].
			Diferencian el polígono de menor cantidad de lados, indicando que el triángulo en el plano tienen tres ángulo y el polígono de dos lados tiene solo un dos ángulos.	Ángulo como **elemento compositor de un polígono** [P, E].
	Descomponen la figura señalando sus elementos.	En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63). 	Construyen el polígono de dos lados en la esfera, nombran sus ángulos y señalan que son congruentes. Además, nombran el polígono según la cantidad de ángulos: biángulo, diángulo.	**Ángulos congruentes como propiedad** de un polígono [E]. **Ángulos condicionados** [E]. Ángulo como **argumento en el nombre** de un polígono [E].

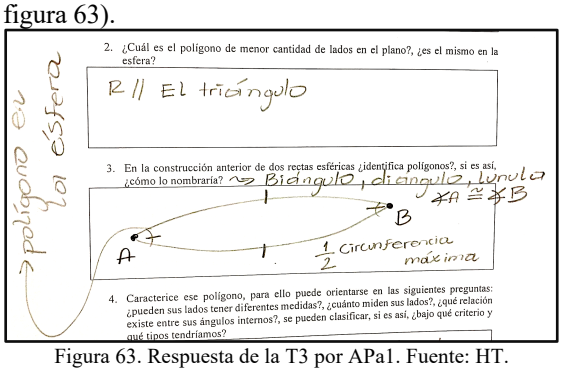
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT.		
	Nombran el polígono de dos ángulos (biángulo, diángulo, diágono, du-cágono, bilátero, lúnula).	V-BPa2-S2|1:44:58-1:44:58|: "Cómo se llama, no lo sabemos". V-BP1-S2|1:47:30-1:47:31|: "Un sufijo para dos". V-BPa2-S2|1:47:37-1:47:37|: "Duple-ángulo", V-BPa3-S2|1:47:45-1:47:45|: "Dúo-ángulo", V-BP1-S2|1:48:45-1:48:51|: "Por ejemplo, de hexágono, entonces podría ser biágono". En la DE, el IP pregunta si le dieron un nombre, V-BPa2-S2|1:59:12-1:59:12|: "Biágono", V-BP1-S2|1:59:24-1:59:42|: "Del nombre de hexágono, …, porque el hexágono es polígono y termina en ágono, por eso le pusimos así". V-CPa1-S2|1:38:42-1:38:49|: "¿Cómo lo nombraríamos? Yo lo nombraría du-cágono", el V-CP2-S2|1:38:49-1:38:55|: "Du-ángulo…, bilátero". La V-CPa3-S2|1:38:56-1:39:02|: "Sí, porque si el triángulo se llama triángulo porque tiene tres lados, entonces este se tendría que llamar así, o bi de dos".	Reconocen que el nuevo polígono tiene dos ángulos, por lo que nombran el polígono haciendo referencia a esa cantidad de ángulos: dúo-ángulo, duple-ángulo, biágono, biángulo, du-cágono, du-ángulo.	Ángulo como **elemento compositor** de un polígono [E]. Ángulo como **argumento en el nombre** de un polígono [P, E].
		V-CP2-S2|1:45:00-1:45:00|: "El biángulo". Al preguntar cómo es, V-CPa1-S2|1:45:07-1:45:49|: "Tiene dos lados y dos vértices y dos ángulos". El IP pregunta por qué lo nombraría biángulo, V-CP2-S2|1:45:33-1:45:33|: "Porque hay dos ángulos". Una de las notas del investigador-obervador describe este proceso (ver figura 68).  Nota3: Los estudiantes observan que en la esfera se puede formar una figura que tiene dos lados, dos ángulos y dos vértices; esto no lo pueden hacer en el plano. Se observan sonrientes y les divierte buscar un nombre para el polígono que construyeron. Algunos nombres: Biángulo Biagono ← Toman el nombre de la terminación del Hexágono Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Figura 68. Nota de investigador-observador sobre el polígono de dos lados. Fuente: NIO.	Describen los elementos que componen el polígono de dos lados, reconociendo que tiene también dos ángulos y dos vértices.	Ángulo como **elemento compositor** de un polígono [E].
	Notan y establecen que sus ángulos internos son congruentes.	En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63).  2. ¿Cuál es el polígono de menor cantidad de lados en el plano?, ¿es el mismo en la esfera? R // El triángulo 3. En la construcción anterior de dos rectas esféricas ¿identifica polígonos?, si es así, ¿cómo lo nombraría? → Biángulo, diángulo, lúnula ∡A ≅ ∡B A B 1/2 circunferencia máxima → polígono en la esfera 4. Caracterice ese polígono, para ello puede orientarse en las siguientes preguntas: ¿pueden sus lados tener diferentes medidas?, ¿cuánto miden sus lados?, ¿qué relación existe entre sus ángulos internos?, se pueden clasificar, si es así, ¿bajo qué criterio y qué tipos tendríamos? Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT.	Construyen el polígono de dos lados en la esfera, nombran sus ángulos y señalan que son congruentes. Además, nombran el polígono según la cantidad de ángulos: biángulo, diángulo.	**Ángulos congruentes como propiedad** de un polígono [E]. **Ángulos condicionados** [E]. Ángulo como **argumento en el nombre** de un polígono [E].
		Al preguntar por la relación entre sus ángulos internos, el V-CP2-S2|1:52:30-1:52:40|: "Son los mismos, no cambian de medida… son internos congruentes". Al preguntar si esos ángulos pueden variar, cambiar de medida juntos, el V-CP2-S2|1:53:44-1:53:44|: "No". El IP señala dos ángulos	Reconocen que los ángulos internos son congruntes porque son ángulos construidos por los mismo dos segmentos.	Ángulo **como cantidad estática** por su medida [E]. Ángulo **como relación** (por estár compuesto por

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		de dos lúnulas diferentes y todo el grupo menciona que no; el IP hace una explicación en la que señala que dos ángulos internos de una lúnula son congruentes entre ellos, luego señala los ángulos internos de otra lúnula indicando que son congruentes entre ellos, pero que los ángulos de las dos lúnulas no son congruentes.	Además, que pueden cambiar juntos de medida.	la relación de dos segmentos) [P, E]. Ángulo **como cantidad dinámica** porque pueden cambiar juntos de medida [E].
	Exponen los criterios de clasificación de los triángulos.	V-AP3-S2|1:53:19-1:53:20|: "Por la medida de sus lados y por la medida de sus ángulos". V-BP1-S2|2:02:22-2:03:09|: "Es que así como los triángulos, este es triángulo con el ángulo obtuso, y este es un triángulo con el ángulo agudo, y este es rectángulo [en sus HT dibuja las representaciones de los triángulos (ver figura 65)], [BPa3: Son los tres], pero así como este que son perpendiculares [refiere a su construcción en la esfera] este sería recto, entonces sería un biágono recto [BPa2: Sí, ya tenemos los nombres, ..., le salió natural]".  Figura 65. Representaciones de tipos de triángulos por BP1. Fuente: HT. V-CPa1-S2|2:05:44-2:05:34|: "Los podríamos clasificar como se clasifican en el plano", el V-CP2-S2|2:05:49-2:05:52|: "Tengo una duda, pero ¿cómo sería un ángulo obtuso?", la V-CPa1-S2|2:05:54-2:05:58|: "Aquí trazamos otra; todo esto sería un obtuso".	Describen que los triángulos se clasifican según la medida de sus ángulos. Presentan los tipos de triángulos según sus ángulos: obtuso, agudo, recto. Identifican que construyeron un biángulo recto. Construyen un ángulo obtuso en la esfera para verificar que existen los biángulos obtusos.	Ángulo como **criterio de clasificación** de polígonos [P, E]. Ángulo como **elemento compositor** de un polígono [P, E]. Ángulo como **criterio de clasificación** de polígonos [P, E].
	Admiten que en la esfera también los ángulos se miden en grados.	V-APa1-S2|1:56:23-1:57:03|: "Ah por el suplemento, es cierto, porque todos son 180, aunque no sabemos si aquí se mide en grados [el AP3 le dice que sí], ah si es cierto, si tenemos esto [señala el transportador esférico], es cierto, por el suplemento, entonces, este sería el complemento [el AP3 le dice: El suplemento], ah sí, porque estos los dos suman 180, son ángulos suplementarios".	Relacionan dos ángulos adyacentes que suman 180 grados. Dado que usan el transportador esférico deducen que los ángulos esféricos también se miden en grados.	**Relaciones de ángulos-adyacentes** (complementarios, suplementarios) [P, E]. **Ángulo como cantidad estática** [P, E].
	Identifican biángulos opuestos por el vértice.	Al pensar en la clasificación, V-BP1-S2|2:00:00-2:00:07|: "Pero es que solo habrían dos, porque uno es el complemento, lo mismo que ellos [escuchó la discusión del equipo A]". V-BP1-S2|2:00:19-2:00:36|: "Porque si este fuera más pequeño, sería el complemento del otro [BPa3: Sí]; el otro sería el complemento de este, pero cómo serían, ¿por qué solo esos dos serían?". V-BPa3-S2|2:00:51-2:00:55|: "Si se pueden clasificar con dos lados y dos ángulos, podemos decir que son opuestos".	Dados dos ángulos complementarios identifican dos biángulos complemnetarios que se definen por esos ángulos. Dicen que si el ángulo serían más pequeños es decir quelo notan estático. Además, nota que ángulos opuestos por el vértice definen biángulos opuestos por el vértice.	**Relaciones de ángulos-adyacentes** (complementarios, suplementarios) y **opuestos por el vértice** [P, E]. **Relaciones de dependencia entre ángulos y polígonos** [E]. Áncgulo como **criterio de clasificación** de polígonos [P, E].
	Trasladan las relaciones de	V-APa2-S2|1:54:55-1:55:13|: "Ángulos complementarios…, suplementarios", el V-AP3-	Identifican y señalan ángulos complementarios y	

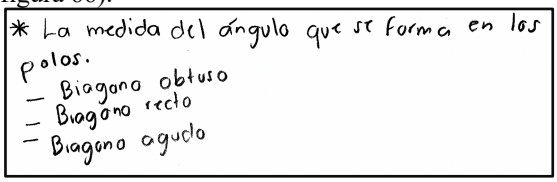
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	ángulos adyacentes y la clasificación del triángulo según la medida de sus ángulos del plano a la esfera. Relacionan ángulos adyacentes e identifican ángulos complementarios y suplementarios. Relacionan biángulos adyacentes e identifican biángulos complementarios y suplementarios.	S2|1:55:16-1:55:20|: "Ah, sí, podrían ser suplementarios". V-APa2-S2|1:56:16-1:56:16|: "Yo sugeriría por eso", el V-AP3-S2|1:56:20-1:56:22|: "Sí, [menciona el nombre de la APa2] lo que decía es por suplemento", V-APa1-S2|1:56:23-1:57:03|: "Ah por el suplemento, es cierto, porque todos son 180, aunque no sabemos si aquí se mide en grados [el AP3 le dice que sí], ah si es cierto, si tenemos esto [señala el transportador esférico], es cierto, por el suplemento, entonces, este sería el complemento [el AP3 le dice: El suplemento], ah sí, porque estos los dos suman 180, son ángulos suplementarios", el V-AP3-S2|1:57:04-1:57:22|: "Pero siento que igual se podrían ver como ángulos [la APa2 dice: Adyacentes], también", V-APa1-S2|1:57:09-1:57:23|: "Pero los adyacentes también son suplementarios… pero este, este no es adyacente de este de acá", V-APa2-S2|1:57:24-1:57:42|: "Si es adyacente con este, ambos forman un ángulo de 180 grados, este con este forman 180, este con este 180, son el suplemento, para más finos vámonos por el suplemento".	suplementarios. Juntan ángulos formando 180 grados. Notan que hay ángulos que no son adyacentes, son los opuestos por el vértice. Deciden clasificar los biángulos como suplementarios y complementarios.	Ángulo **como una cantidad estática** [E]. **Relacion entre ángulos-opuestos por el vértice** [P, E]. **Relaciones entre ángulos como criterio de clasificación** de polígonos [E].
		El IP pregunta si podemos tener biángulos mayores a 180 grados. El V-AP3-S2|2:09:48-2:09:48|: "Ah, sí", el IP hace una explicación de un posible biángulo mayor a 180 grados y todo el grupo menciona aceptarlo como biángulo. Al preguntar al equipo, V-APa1-S2|2:10:38-2:11:48|: "Suplementarios, vimos que, por ejemplo, comparamos este de aquí con este de aquí y vimos que, haciendo la relación con el plano, estos dos suman 180; bien, tomamos estos dos, podemos ver que según el criterio, según la medida de sus ángulos, ya vimos que de los lados no podemos porque tienen la misma congruencia, luego vemos que si unimos estos dos formamos 180 entonces podríamos decir que son suplementarios, es como cuando tenemos ángulos suplementarios en el plano que suman 180 [el IP pregunta: aquí podríamos tener biángulos suplementarios], ajá, según lo que nosotros observamos, esa fue la relación que nosotros construímos [el IP pregunta: Tienen o se podrían tener complementarios], sí, ellos [señala la construcción del equipo B] hicieron rectos, ahí podrían haber complementarios".	Aceptan que hay que biángulos con ángulos mayores a 180 grados. Relaciones ángulos para formar biángulos complementarios y suplementarios. Toman como criterio la medida de sus ángulos. Juntan ángulos formando ángulos suplementarios.	**Ángulo como una cantidad estántica** [P, E]. **Relaciones de ángulos-adyacentes** (complementarios, suplementarios) [P, E]. Ángulo como **criterio de clasificación** de polígonos [P, E].
		Al pensar en la clasificación, V-BP1-S2|2:00:00-2:00:07|: "Pero es que solo habrían dos, porque uno es el complemento, lo mismo que ellos [escuchó la discusión del equipo A]". V-BP1-S2|2:00:19-2:00:36|: "Porque si este fuera más pequeño, sería el complemento del otro [BPa3: Sí]; el otro sería el complemento de este, pero cómo serían, ¿por qué solo esos dos serían?". V-CP2-S2|2:03:37-2:04:02|: "Pero veamos las características de estos, estos dos, qué me forman estos dos, una semi…, la mitad de la superficie de la esfera, bueno, la superficie de la esfera formada o la	Primero reconocen que tendrían dos tipos de biángulos, los complementarios y suplementarios, al relacionar sus ángulos. Además, notan que esos ángulos están estátitos, dado que mencionan que si un ángulo fuera más pequeño, sería el complemento de otro.	**Relaciones de ángulos-adyacentes** (complementarios, suplementarios) [P, E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P, E].

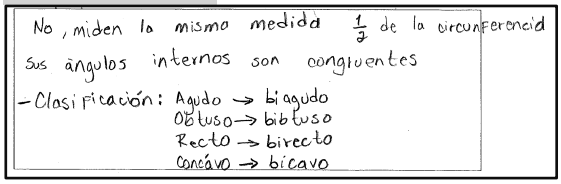
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		suma de ambas me va a formar toda la, me va a formar la semiesfera", continúa diciendo, el V-CP2-S2|2:04:13-2:04:19|: "Ajá, cómo van a ser estos ángulos, complementarios [refiere a suplementarios], entonces, regiones complementarias", la V-CPa3-S2|2:04:29-2:04:30|: "El complemento del otro".	Señalan que dos ángulos forman una semiesfera, es decir que dos ángulos suplementarios forman la mitad de la esfera.	**Ángulo como cualidad**, forma una región de la superficie [P, E].
	Establecen la medida de los ángulos internos como criterio de clasificación ; construyen algunos tipos de biángulos según la medida de sus ángulos internos (agudos, rectos y obtusos).	V-BPa3-S2|2:02:18-2:02:19|: "Aquí, aquí es un ángulo", V-BP1-S2|2:02:22-2:03:09|: "Es que así como los triángulos, este es triángulo con el ángulo obtuso, y este es un triángulo con el ángulo agudo, y este es rectángulo [en sus HT dibuja las representaciones de los triángulos], [BPa3: Son los tres], pero así como este que son perpendiculares [refiere a su construcción en la esfera] este sería recto, entonces sería un biágono recto [BPa2: Sí, ya tenemos los nombres, ..., le salió natural]", continúa diciendo, V-BP1-S2|2:03:15-2:03:21|: "Pero y los otros, biágono agudo, biágono obtuso, por la medida del ángulo". En sus HT, la BPa2 presenta esta clasificación (ver figura 66).	Identifican ángulos, y describen la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos.	Ángulo como **criterio en la clasificación** de polígonos [P, E].
		 Figura 66. Respuesta de la T4 por BPa2. Fuente: HT.	Identifican que dos rectas son perpendiculares por lo que formarían un biángulo recto. Luego reconocen que tendrían biángulos agudos y obtusos.	Ángulo **como una relación** (consecuencia de la perpendicularidad) [P, E].
		V-BP1-S2|2:08:12-2:09:11|: "Bueno, el criterio es la medida del ángulo, referente a los puntos a los polos, entonces la medida puede ser, bueno, pensando siempre en relacionarlos, ¿verdad?, con el plano, tenemos ángulos agudos, rectos y obtusos, entonces, de igual forma los clasificamos. Por ejemplo, nosotros aquí tenemos, nosotros dibujamos perpendiculares (ver figura 67), entonces en ese sentido, no sé si las medidas serán iguales, pero serían perpendiculares y podríamos decir que sería como un biágono recto, no sé, no sé si sería así, pero igual dependiendo de la medida del ángulo podría ser biángulo agudo, recto u obtuso".	Establecen que el criterio de clasificación de biángulos es la medida de sus ángulos internos. Relacionan ángulos para clasificar los biángulos.	Ángulo como **criterio en la clasificación** de polígonos [P, E].
		Figura 67. Construcción de biágonos rectos por el equipo B. Fuente: Fotografía-Sesión 2.		
		V-CPa1-S2|2:05:29-2:05:34|: "Cómo los podemos clasificar, no solo enfocándonos en estos dos, sino que en todos los que se puedan tener", la V-CPa3-S2|2:05:37-2:05:46|: "Sí, exactamente". V-CPa1-	Inicialmente, reconocen que tiene solo dos biángulos y que necesitan tener más	Ángulo como **criterio en la clasificación** de polígonos [P, E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		S2|2:05:44-2:05:34|: "Los podríamos clasificar como se clasifican en el plano", el V-CP2-S2|2:05:49-2:05:52|: "Tengo una duda, pero ¿cómo sería un ángulo obtuso?", la V-CPa1-S2|2:05:54-2:05:58|: "Aquí trazamos otra; todo esto sería un obtuso".	casos para poder clasificar todos los biángulos.	
	Problematizan la existencia del biángulo nulo y llano.	Ante la pregunta que hace el IP, si se podrían tener biángulos nulos, el V-AP3-S2|2:12:27-2:12:32|: "Yo le iba a preguntar eso, qué sucede si es el ecuador la única".	Cuestionan la existencia del biángulo nulo.	Ángulo nulo, entre dos rectas que **no definen un polígono** [E].
		V-CPa1-S2|2:06:04-2:06:06|: "Entonces tendríamos la misma clasificación que tenemos en el plano", el V-CP2-S2|2:06:07-2:06:53|: "Ajá, y sí es la misma, pero ahí ya no tendríamos una figura [alguien le señaló la semiesfera]. No entiendo por qué no podría haber llanos, porque entonces ya no formarían la figura, porque el llano sería la misma figura; la abertura del llano sería esta, pero ya no tendríamos una figura, porque estamos clasificando los ángulos de esta figura, entonces, por ejemplo, son suplementarios y van a ser un agudo y un obtuso, y habría uno especial que no es ni agudo ni obtuso, que sería recto".	El ángulo llano, muestra a la semiesfera como un biángulo especial, ya que inicialmente no notan esa figura.	Ángulo llano, **divide a la esfera en dos semiesfera** [E].
		El IP pregunta si podríamos tener biángulos nulos. Cuando el AP3 pregunta por lo que sucede si el ecuador es la única recta, V-CP2-S2|2:12:33-2:12:35|: "Pero entonces no se formaría un polígono". El IP recuerda las características de un polígono que mencionaron antes; se problematiza la idea de un área nula.	Cuestionan la existencia del biángulo nulo.	Ángulo nulo, entre dos rectas que **no definen un polígono** [E].
	Recta y segmento de recta plano y esférico			
En las actividades	Reconocer propiedades del biángulo (polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices; los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima; sus ángulos internos son congruentes).	En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63).  Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT. V-BPa2-S2|1:42:35-1:42:57|: "En el plano es el triángulo, pero está preguntando si es el mismo en la esfera, pero no, porque todo esto [la BPa3 dice que son meridianos], este coso, como el pedazo, como un gajo de una naranja, es un polígono y solo tiene dos y dos vértices. Entonces, el menor no es el triángulo en la esfera". V-BPa2-S2|1:43:22-1:43:38|: "Es que en el plano, pero aquí solo tiene dos y esto ya es una región cerrada". V-BPa2-S2|1:43:52-1:44:26|: "Por	Establecen propiedades de un polígono (tres o más lados rectos, encierra una región de la superficie); establecen que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano; problematizan el significado de un polígono (debe tener mínimo tres lados y/o debe tener una región cerrada); identifican un polígono de dos lados en la esfera; descomponen la figura señalando sus elementos; caracterizan el polígono de dos lados (el coso, el pedazo, gajo de mandarina, sector esférico, arco esférico); buscan prefijos para dos (duple, dúo, bi, du); toman al hexágono como ejemplo; nombran el polígono de dos lados (biángulo, diángulo,	Segmentos como **elemento compositor de un polígono** [P, E]. Tres o más segmentos **forman una región cerrada** [P]. Dos o más segmentos **forman una región cerrada** [P]. Segmentos como el **argumento para nombrar** otra noción geométrica [E]. Es un **argumento** (por ser congruentes) **en**

Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	eso pidió la definición de polígono, …, en el plano es una figura plana cerrada con n lados, pero el mínimo es tres porque para que sea cerrada, en el plano, esta solo ocupa dos; entonces en el plano y en la esfera no es el mismo”. V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: “Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura”. La V-CPa1-S2|1:36:42-1:37:49|: “Entonces, es el mismo en la esfera o no”. El V-CP2-S2|1:36:46-1:36:14|: “No, porque… si nosotros tenemos esta figura, nosotros notamos que está cerrada… esta tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y este solo dos ángulos, dos lados y dos vértices”. Ante la pregunta, pueden sus lados tener diferentes medidas. El V-CP2-S2|1:52:00-1:52:00|: “No”, el IP pregunta cuánto miden sus lados; todos los participantes están de acuerdo en que mide ½ o la mitad de una circunferencia máxima. Al preguntar por la relación entre sus ángulos internos, el V-CP2-S2|1:52:30-1:52:40|: “Son los mismos, no cambian de medida… son internos congruentes”.	diágono, du-cágono, bilátero, lúnula); notan y establecen que los lados del biángulo son constantes, miden una semicircunferencia máxima; notan y establecen que sus ángulos internos son congruentes.	**propiedades** de un polígono [E]. La **semicircunferencia máxima como el lado del polígono** de dos lados [E]. La **semicircunferencia máxima como el lado del polígono** de dos lados [E]. El **segmento estático** o como una **cantidad estática (**siendo el lado de un biángulo).
	Ángulo plano y esférico		
Reconocer propiedades del biángulo (polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices; los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima; sus ángulos internos son congruentes) .	En sus HT, la APa1 dibuja el polígono de lados, lo nombra y presenta algunas de sus características (ver figura 63).  2. ¿Cuál es el polígono de menor cantidad de lados en el plano?, ¿es el mismo en la esfera? R // El triángulo 3. En la construcción anterior de dos rectas esféricas ¿identifica polígonos?, si es así, ¿cómo lo nombraría? → Biángulo, diángulo, lúnula ∡A ≅ ∡B A B 1/2 circunferencia máxima → polígono en la esfera 4. Caracterice ese polígono, para ello puede orientarse en las siguientes preguntas: ¿pueden sus lados tener diferentes medidas?, ¿cuánto miden sus lados?, ¿qué relación existe entre sus ángulos internos?, se pueden clasificar, si es así, ¿bajo qué criterio y qué tipos tendríamos? Figura 63. Respuesta de la T3 por APa1. Fuente: HT. V-BPa2-S2|1:42:35-1:42:57|: “En el plano es el triángulo, pero está preguntando si es el mismo en la esfera, pero no, porque todo esto [la BPa3 dice que son meridianos], este coso, como el pedazo, como un gajo de una naranja, es un polígono y solo tiene dos y dos vértices. Entonces, el menor no es el triángulo en la esfera”. V-BPa2-S2|1:43:22-1:43:38|: “Es que en el plano, pero aquí solo tiene dos y esto ya es una región cerrada”. V-BPa2-S2|1:43:52-1:44:26|: “Por eso pidió la definición de polígono, …, en el plano es una figura plana cerrada con n lados, pero el mínimo es tres porque para que sea cerrada, en el plano, esta solo ocupa dos; entonces en el plano y en la esfera no es el mismo”.	Establecen propiedades de un polígono (tres o más lados rectos, encierra una región de la superficie); establecen que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano; problematizan el significado de un polígono (debe tener mínimo tres lados y/o debe tener una región cerrada); identifican un polígono de dos lados en la esfera; descomponen la figura señalando sus elementos; caracterizan el polígono de dos lados (el coso, el pedazo, gajo de mandarina, sector esférico, arco esférico); buscan prefijos para dos (duple, dúo, bi, du); toman al hexágono como ejemplo; nombran el polígono de dos lados (biángulo, diángulo, diágono, du-cágono, bilátero, lúnula); notan y establecen que los lados del biángulo son constantes, miden una semicircunferencia máxima;	Ángulo como **elemento compositor de un polígono** [P, E]. **Ángulos congruentes como propiedad** de un polígono [E]. **Ángulos condicionados** [E]. Ángulo como **argumento en el nombre** de un polígono [E]. Ángulo **como cantidad estática** por su medida [E]. Ángulo **como relación** (por estár compuesto por la relación de dos segmentos) [P, E]. Ángulo **como cantidad dinámica** porque pueden cambiar juntos de medida [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		V-CP2-S2|1:35:51-1:36:14|: "Recordemos que es una figura cerrada, un polígono es una figura cerrada, entonces en este caso con dos puntos [la CPa3 reafirma su respuesta]… porque la característica del polígono es, si tiene tres lados, tiene tres puntos y en este caso con dos puntos nosotros formamos una figura". La V-CPa1-S2|1:36:42-1:37:49|: "Entonces, es el mismo en la esfera o no". El V-CP2-S2|1:36:46-1:36:14|: "No, porque… si nosotros tenemos esta figura, nosotros notamos que está cerrada… esta tiene tres ángulos, tres lados y tres vértices y este solo dos ángulos, dos lados y dos vértices". Ante la pregunta, pueden sus lados tener diferentes medidas. El V-CP2-S2|1:52:00-1:52:00|: "No", el IP pregunta cuánto miden sus lados; todos los participantes están de acuerdo en que mide ½ o la mitad de una circunferencia máxima. Al preguntar por la relación entre sus ángulos internos, el V-CP2-S2|1:52:30-1:52:40|: "Son los mismos, no cambian de medida… son internos congruentes".	notan y establecen que sus ángulos internos son congruentes.	**Ángulo como cualidad**, forma una región de la superficie [P, E]. Ángulo **como una relación** (consecuencia de la perpendicularidad) [P, E].
	Clasificar los biángulos (según su área: región mayor y región menor; según se relación con otro biángulos: biángulos opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios; según la medida de sus ángulos internos: agudos, rectos, obtusos y cóncavos).	V-AP3-S2|1:54:48-1:55:06|: "Yo me diría que los llamáramos agudos, rectos; rectos por si se intersecan en un ángulo recto, agudo si es menor de 90 grados", V-APa2-S2|1:54:55-1:55:13|: "Ángulos complementarios…, suplementarios", el V-AP3-S2|1:55:16-1:55:20|: "Ah, sí, podrían ser suplementarios". V-APa2-S2|1:56:16-1:56:16|: "Yo sugeriría por eso", el V-AP3-S2|1:56:20-1:56:22|: "Sí, [menciona el nombre de la APa2] lo que decía es por suplemento", V-APa1-S2|1:56:23-1:57:03|: "Ah por el suplemento, es cierto, porque todos son 180, aunque no sabemos si aquí se mide en grados [el AP3 le dice que sí], ah si es cierto, si tenemos esto [señala el transportador esférico], es cierto, por el suplemento, entonces, este sería el complemento [el AP3 le dice: El suplemento], ah sí, porque estos los dos suman 180, son ángulos suplementarios", el V-AP3-S2|1:57:04-1:57:22|: "Pero siento que igual se podrían ver como ángulos [la APa2 dice: Adyacentes], también", V-APa1-S2|1:57:09-1:57:23|: "Pero los adyacentes también son suplementarios… pero este, este no es adyacente de este de acá", V-APa2-S2|1:57:24-1:57:42|: "Si es adyacente con este, ambos forman un ángulo de 180 grados, este con este forman 180, este con este 180, son el suplemento, para más finos vámonos por el suplemento". V-BP1-S2|2:01:20-2:01:39|: "[BPa2: El suplemento], nosotros lo estábamos pensando porque está así, o sea, estábamos pensando en este con este, es el que divide [BPa2: Usted puede que este es suplemento, decir que este y este es 80 grados]. Bueno, si lo mira como en el plano, sí, pero creo que la medida no es la misma acá". V-BP1-	Exponen los criterios de clasificación de los triángulos; establecen que el biángulo no se puede clasificar según la medida de los lados, porque siempre miden lo mismo; admiten que en la esfera también los ángulos se miden en grados; consideran dos biángulos como ejemplos; identifican biángulos opuestos por el vértice; trasladan las relaciones de ángulos adyacentes y la clasificación del triángulo según la medida de sus ángulos del plano a la esfera; relacionan ángulos adyacentes e identifican ángulos complementarios y suplementarios; relacionan biángulos adyacentes e identifican biángulos complementarios y suplementarios; establecen la medida de los ángulos internos como criterio de clasificación; construyen algunos tipos de biángulos según la medida de sus ángulos internos (agudos, rectos y obtusos); problematizan la existencia del biángulo nulo y llano.	Ángulo como **criterio de clasificación** de polígonos [P, E]. Ángulo como **elemento compositor** de un polígono [P, E]. **Ángulo como cantidad estática** [P, E]. **Relaciones de ángulos-adyacentes** (complementarios, suplementarios) y **opuestos por el vértice** [P, E]. **Relaciones de dependencia entre ángulos y polígonos** [E]. **Relaciones entre ángulos como criterio de clasificación** de polígonos [E]. **Ángulo como cualidad**, forma una región de la superficie [P, E]. Ángulo **como una relación** (consecuencia de la perpendicularidad) [P, E]. Ángulo nulo, entre dos rectas que **no definen un polígono** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		S2|2:01:59-2:02:00|: "Es que se pueden clasificar solamente por los ángulos", V-BPa3-S2|2:02:18-2:02:19|: "Aquí, aquí es un ángulo", V-BP1-S2|2:02:22-2:03:09|: "Es que así como los triángulos, este es triángulo con el ángulo obtuso, y este es un triángulo con el ángulo agudo, y este es rectángulo [en sus HT dibuja las representaciones de los triángulos], [BPa3: Son los tres], pero así como este que son perpendiculares [refiere a su construcción en la esfera] este sería recto, entonces sería un biágono recto [BPa2: Sí, ya tenemos los nombres, ..., le salió natural]", continúa diciendo, V-BP1-S2|2:03:15-2:03:21|: "Pero y los otros, biágono agudo, biágono obtuso, por la medida del ángulo". En sus HT, la BPa2 presenta esta clasificación (ver figura 66).  Figura 66. Respuesta de la T4 por BPa2. Fuente: HT. V-CP2-S2|2:03:37-2:04:02|: "Pero veamos las características de estos, estos dos, qué me forman estos dos, una semi…, la mitad de la superficie de la esfera, bueno, la superficie de la esfera formada o la suma de ambas me va a formar toda la, me va a formar la semiesfera", continúa diciendo, el V-CP2-S2|2:04:13-2:04:19|: "Ajá, cómo van a ser estos ángulos, complementarios [refiere a suplementarios], entonces, regiones complementarias", la V-CPa3-S2|2:04:29-2:04:30|: "El complemento del otro". El V-CP2-S2|2:04:44-2:04:19|: "Ajá, pero la pregunta es se puede clasificar, región mayor y región menor, arco mayor y arco menor", V-CPa1-S2|2:04:53-2:04:59|: "Es que el problema es que no solo tendríamos estos dos, podríamos trazar más y tener más", V-CP2-S2|2:04:59-2:05:06|: "No, pero la figura está formada a partir de estas dos, de estos dos, esta es la menor". V-CPa1-S2|2:05:29-2:05:34|: "Cómo los podemos clasificar, no solo enfocándonos en estos dos, sino que en todos los que se puedan tener", la V-CPa3-S2|2:05:37-2:05:46|: "Sí, exactamente". V-CPa1-S2|2:05:44-2:05:34|: "Los podríamos clasificar como se clasifican en el plano", el V-CP2-S2|2:05:49-2:05:52|: "Tengo una duda, pero ¿cómo sería un ángulo obtuso?", la V-CPa1-S2|2:05:54-2:05:58|: "Aquí trazamos otra; todo esto sería un obtuso". V-CPa1-S2|2:12:02-2:07:05|: "Tenemos similar a la clasificación del equipo B, el agudo, solo que llamamos biagudo, bituso, birecto y bicavo". Esta clasificación la presenta en sus HT (ver figura 69).		Ángulo llano, **divide a la esfera en dos semiesfera** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		El IP pregunta si podríamos tener biángulos nulos. Cuando el AP3 pregunta por lo que sucede si el ecuador es la única recta, V-CP2-S2|2:12:33-2:12:35|: "Pero entonces no se formaría un polígono". El IP recuerda las características de un polígono que mencionaron antes; se problematiza la idea de un área nula.  Figura 69. Respuesta de la T4 por CPa1. Fuente: HT.		

6. Parte VI. Tres ángulos

Un triángulo está compuesto por tres lados y tres ángulos. Dados algunos de estos elementos, buscaremos responder a la pregunta ¿cuántos triángulos diferentes podrían construirse (en el plano y en la esfera)?

Un elemento fijo:

Si tenemos uno de esos elementos fijo (que no puede cambiar de medida). Ese elemento puede ser un lado o un ángulo (L, A), en equipo seleccionen un elemento y desarrollen el caso, primero en una hoja de papel y luego en la esfera.

1. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características?

2. Para responder a la pregunta, necesitamos construir uno o varios triángulos. Para ello, completen la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos de partida y los restantes ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué?

Dos elementos fijos:

Si tenemos dos de esos elementos fijos (que no pueden cambiar de medida) (LL, LA, AA). En equipo seleccionen dos elementos y desarrollen el caso, primero en una hoja de papel y luego en la esfera.

3. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características?

4. Para responder a la pregunta, necesitamos construir uno o varios triángulos. Para ello, completen la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos de partida y los restantes ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué?

Tres elementos fijos:

Si tenemos tres de esos elementos fijos (que no pueden cambiar de medida) (LLL, LLA, LAA, AAA). En equipo seleccionen tres elementos y desarrollen el caso, primero en una hoja de papel y luego en la esfera.

5. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características?

6. Para responder a la pregunta, necesitamos construir uno o varios triángulos. Para ello, completen la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos de partida y los restantes ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué?

7. *Si dados algunos de esos elementos fijos se puede construir **solo un** triángulo y hay dos triángulos que tienen esos mismos elementos iguales, ¿podemos concluir que los dos triángulos son iguales, es decir, que los lados y ángulos restantes entre esos dos triángulos son iguales?

Hipótesis didáctica:

Dada la forma en la que se han trabajado las tareas anteriores, resultará coherente el contexto geométrico. En la selección de elementos del triángulo, el ángulo recto será un elemento prototipo tanto en el plano como en la esfera.

Un elemento fijo (caso 1 - A, L):
Sub-caso 1 - A: (T1) Mencionarán que los lados del triángulo limitados por el ángulo no pueden cambiar de dirección (o girar), a menos que gire el ángulo completo. Además, como la longitud de esos lados puede cambiar, los otros dos ángulos (que suman el suplemento del primero) también cambian de medida. Con ello, concluirán que tanto en el plano como en la esfera se construyen infinitos triángulos (T2).
Sub-caso 2 - L: (T1) Reconocerán que la abertura de los ángulos que se pueden agregar a los extremos del lado están limitados por la composición del triángulo, señalando las siguientes posibilidades: (a) en el plano esos dos

ángulos no pueden ser rectos, pero en la esfera sí; (b) en el plano ambos ángulos pueden ser agudos, un recto y un agudo o un obtuso y un agudo; el tercero depende de los dos primeros; en cambio, en la esfera, los tres ángulos pueden ser rectos (dependiendo de la longitud del segmento seleccionado) y, si construyen dos ángulos rectos en sus extremos, sus otros dos lados mediarán un cuarto de circunferencia máxima. En ambas superficies concluirán que se pueden construir infinitos triángulos (T2).

Dos elementos fijos (caso 2- LL, LA, AA):
Sub-caso 1 - LL: (T3) Reconocerán que, tanto en el plano como en la esfera, el ángulo entre los lados puede cambiar de medida; como consecuencia, los otros ángulos y el tercer lado también cambian. Por ello, aunque están limitados por la composición del triángulo, se pueden construir infinitos (T4).
Sub-caso 2 - LA: (T3) En el plano, reconocerán que los otros dos ángulos dependen de la longitud de los lados restantes; además, su suma será el suplemento del ángulo seleccionado. En dependencia del tipo de ángulo seleccionado, expondrán los tipos de ángulos que serán los otros dos; por su parte, en la esfera va a ocurrir lo mismo, excepto la suma de los ángulos internos. Por lo que, en ambas superficies, se podrían construir infinitos (T4).
Sub-caso 3 - AA: (T3) En el plano, expondrán que la selección de los ángulos depende de la composición del triángulo (es decir, no pueden seleccionar dos obtusos o un obtuso y un recto); además, deducirán la medida del tercer ángulo (que indirectamente también es fijo). Variando la longitud de los lados, deducirán que se pueden construir infinitos triángulos. En la esfera, intentarán deducir la medida del tercer ángulo, pero notarán que esta cambia en dependencia de la longitud de los lados. Dada la variación del tercer ángulo y los tres lados, deducirán la construcción de infinitos triángulos (T4).

Tres elementos fijos (caso 2- LLL, LLA, LAA, AAA):
Sub-caso 1 - LLL: (T5) Tanto en el plano como en la esfera, admitirán que, como consecuencia de la composición del triángulo, los ángulos tampoco cambian de medida, por lo que con esta condición solo se puede construir un único triángulo (T6).
Sub-caso 2 - LLA: (T5) Notarán que estos elementos se pueden ubicar de las siguientes formas: LLA, LAL y ALL; su ubicación o la posibilidad de tener las 3 formas depende de la composición del triángulo dado por sus medidas. Tanto en el plano como en la esfera notarán que solo se puede construir un triángulo (T6).
Sub-caso 3 - LAA: (T5) Notarán que estos elementos se pueden ubicar de las siguientes formas: LAA, AAL y ALA; su ubicación o la posibilidad de tener las 3 formas depende de la composición del triángulo dado por sus medidas. Tanto en el plano como en la esfera notarán que solo se puede construir un triángulo (T6).
Sub-caso 4 - AAA: (T5) En el plano reconocerán que moviendo uno de los lados pueden tener infinitos triángulos semejantes, por lo que este sería el único sub-caso en el que se pueden construir infinitos triángulos (T6). En la esfera (T5), al mover uno de los lados, notarán que los ángulos de sus extremos cambian de medida, por lo que, dada la condición de que son fijos, solo se puede construir un único triángulo (T6). Esto lo presentarán como una diferencia entre estas geometrías y lo asociarán a la inexistencia del paralelismo en la esfera.
(T7) Mencionarán que sí. Como esos elementos construyen un único triángulo, si dos triángulos comparten esos elementos, el resto de ellos también debe compartirse.

Descripción general:

Cada uno de los equipos fue seleccionando sub-casos de cada uno de los casos. En el primer caso, de un elemento fijo (L, A), el equipo A seleccionó L, el equipo B seleccionó L y el equipo C seleccionó A; todos los equipos concluyeron que tanto en el plano como en la esfera se pueden construir infinitos triángulos. En el segundo caso, de dos elementos fijos (LL, LA, AA), el equipo A seleccionó LL, el equipo B seleccionó LA y el equipo C seleccionó AA; todos los equipos concluyeron que tanto en el plano como en la esfera se pueden

construir infinitos triángulos. En el tercer caso, de tres elementos fijos (LLL, LLA, LAA, AAA), el equipo A seleccionó LLL, el equipo B seleccionó LLA y el equipo C seleccionó AAA; luego todos los equipos trabajaron el caso LAA. Concluyeron que, en el plano, solo en el sub-caso AAA se pueden construir infinitos triángulos; en los otros se construye un único triángulo; en cambio, en la esfera, en los cuatro sub-casos se construyen triángulos únicos. Sobre la última pregunta, reconocen que en los sub-casos en que se construye un único triángulo, se puede deducir que en dos triángulos que comparten elementos fijos, el resto de los elementos también son compartidos.

Descripción particular:

Equipo A:

Caso 1: Un elemento fijo (seleccionaron: L)

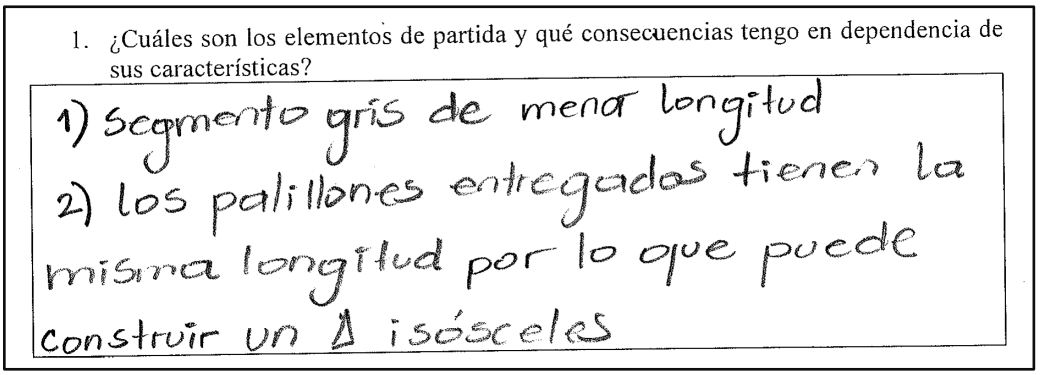
Plano

El equipo A seleccionó un segmento. El IP pregunta si, teniendo un segmento, uno de los ángulos que estaría en uno de sus extremos puede ser de 90 grados (ver figura 70), todos indican que sí, luego pregunta si puede ser de 180 grados y algunos indican que sí, el V-AP3-S3|0:07:54-0:07:54|: "Sí". El IP pregunta si están seguros, el V-AP3-S3|0:08:00-0:08:00|: "Ah, no". Se preguntó si puede ser obtuso, mencionan que sí; entonces el IP pregunta si ese fuera obtuso, cómo sería el ángulo del otro extremo del segmento, el V-AP3-S3|0:08:16-0:08:16|: "Sería agudo". El IP pregunta si el primero es agudo, cómo puede ser otro ángulo del otro extremo del segmento, el V-AP3-S3|0:08:26-0:08:26|: "Obtuso". El IP dice: "Solo obtuso"; aceptan que puede ser agudo, obtuso o recto.

Figura 70. El IP muestra cómo podrían ser los ángulos de los extremos de un lado. Fuente: Video-sesión 3.

(T1) En la DE, el V-AP3-S3|0:08:55-0:09:02|: "Un isósceles, son del mismo tamaño", V-APa1-S3|0:09:07-0:09:29|: "Pero tienen que calzar, ¿verdad?, pero ambos tienen la misma medida [refiere a los dos palillos que no son fijos; esto se muestra en sus HT al hacerlo explícito en la T1 (ver figura 71)], se puede colocar la misma

medida, ¿sí, verdad?, se puede construir un ángulo recto", el V-AP3-S3|0:09:33-0:09:34|: "No, sí, pero nos sobra más aquí, ahí", V-APa1-S3|0:09:36-0:09:46|: "Tiene que quedar calzadito, por ejemplo, aquí es isósceles y queda calzadito [el AP3: Sí, ese sí], yo digo que sí". Al IP, el V-AP3-S3|0:09:56-0:09:58|: "Solo que no sé si se pueden sobreponer", el IP, les recuerda que los otros dos segmentos no son fijos al igual que los tres ángulos, que solo hay un segmento que debe mantener la misma medida, el segmento fijo, además, presenta algunos casos en los que los segmentos que no son fijos se sobreponen, el V-AP3-S3|0:11:07-0:11:34|: "Bueno, pero, si lo mueve aquí y lo mueve para este lado, los ángulos, ambos estos ángulos puede ser agudos u obtusos y este si va a ser agudo siempre, el de arriba, el de arriba no siempre sería agudo, pero si lo mueve, si esto lo mueve para este lado, este sería el obtuso y este sería el agudo y este de aquí siempre sería agudo, este de aquí arriba".


1. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características?

1) Segmento gris de menor longitud
2) los palillones entregados tienen la misma longitud por lo que puede construir un △ isósceles

Figura 71. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT.

(T2) En la DE, para responder a la pregunta general para el plano, el V-AP3-S3|0:21:12-0:21:34|: "Pero lo que me pregunto es, hay infinitos obtusos, hay solo un recto, hay infinitos obtusos, hay infinitos agudos, porque usted puede formar un ángulo 6.1, 6.2, 6.3, 6.35 [su construcción se puede ver en la figura 72]", V-APa1-S3|0:21:31-0:21:32|: "Y contarlos como no", V-APa2-S3|0:21:35-0:21:36|: "Clasificarlos sí", V-APa1-S3|0:21:38-0:21:39|: "El que no se podría formar es el equilátero", V-AP3-S3|0:21:42-0:21:45|: "Sí se puede, sí porque se pueden sobreponer", V-APa1-S3|0:22:00-0:22:02|: "Cuántos podríamos hacer", V-AP3-S3|0:22:04-0:22:31|: "Buena pregunta, no sé si serían infinitos, ese no puede ser igual a 180 y este no puede ser igual a cero [APa1: Todos los triángulos que estén entre], 0 y 180 [APa1: Que no incluye ni a cero y ni a 180][esto APa1 lo hace explícito en sus HT (ver figura 73)], entonces serían, eso es lo que no sé si serían infinitos", V-AP3-S3|0:22:34-0:23:04|: "Tengo una consulta [le pregunta al IP], no sé si serían, o sea según la deducción creo que son infinitos triángulos porque lo que pensaba yo es, eh si uno de los lados está por ejemplo a 15.3 grados entonces usted puede 15.35, 15.36 y ya es otro, ya va aumentando, entonces, entre 0 y 180 habría infinitos triángulos que se podrían formar, pero siento que me pide un número específico, pero no sé". El IP le dice que no necesariamente se pide un número específico, dado que los ángulos pueden cambiar de medida. Estos no necesariamente cambiarán de medida en unidades enteras; también pueden cambiar en decimales. El IP: "¿Este ángulo puede variar?, ¿hasta dónde puede variar?", V-AP3-S3|0:23:21-0:23:53|: "Hasta antes de 180… claro, infinitos".

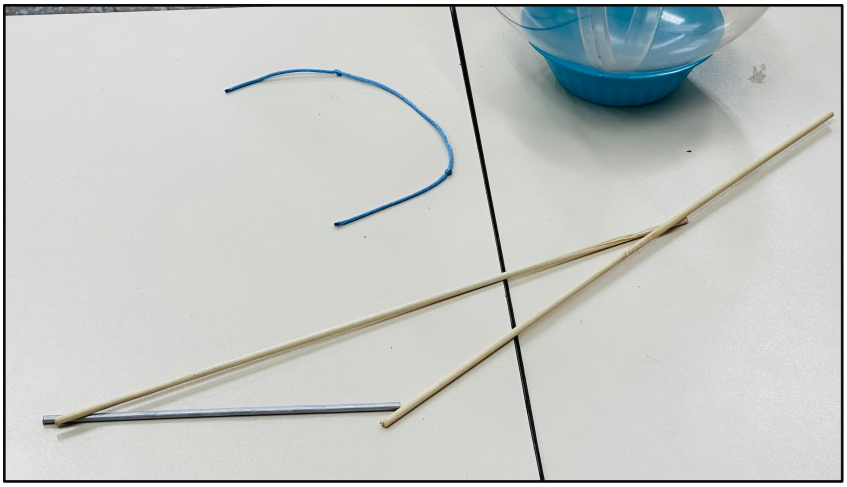


Figura 72. Construcción del equipo A al primer caso en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 1.

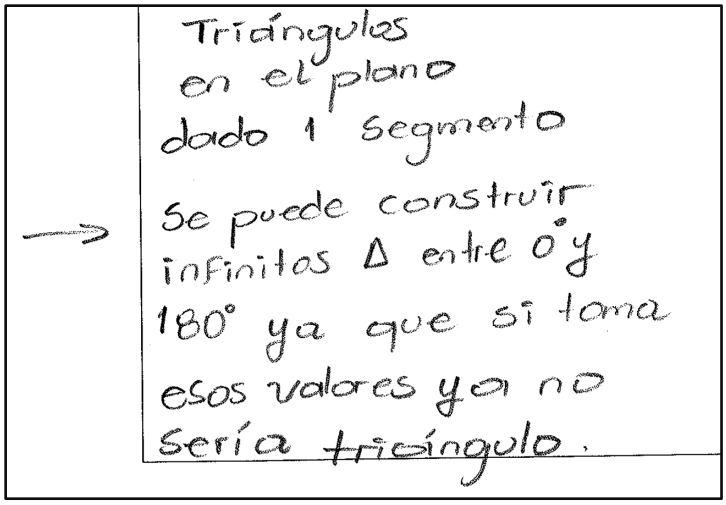


Figura 73. APa1 describe los casos en los que no se construye un triángulo. Fuente: HT.

En la DG, después de la respuesta de BP1, se preguntó al equipo A si habían llegado a esa misma conclusión, V-AP3-S3|0:35:25-0:35:53|: "Sí, solo que igual con los ángulos, que al buscar los ángulos de 180, puedes mover esos dos lados, en función a, por ejemplo, 15.3, y ese 15.3 a 15.35, 36, 37; entonces vendría siendo, podría formar infinitos triángulos entre 0 y 180". La APa2 explicita en sus HT que la medida de los ángulos también podría ser en decimales (ver figura 74).

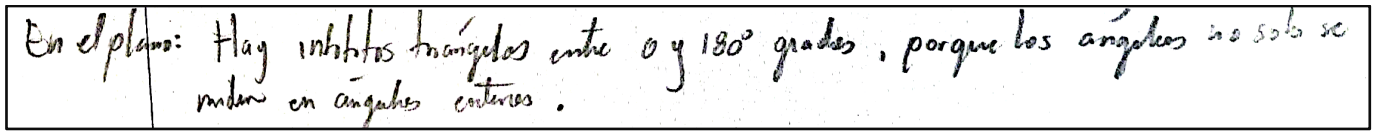


Figura 74. APa2 reconoce que los ángulo no solo se pueden medir con enteros. Fuente: HT.

Esfera

Al pasar al trabajo en la esfera, el IP hace la aclaración de que los lados de un triángulo son geodésicas, indicando que en el plano no se necesitaba esa aclaración porque en el plano todos los segmentos de recta son geodésicas.

(T2) En la DE, la V-APa2-S3|0:49:04-0:49:17|: “Ahí tenemos uno, podemos hacer otro más arriba, …, podemos tener todos los que se quiera, hay infinitos también”, V-APa1-S3|0:50:05-0:50:12|: “¿Los biángulos van de un vértice al otro opuesto, verdad? [le pregunta al AP3]”, V-AP3-S3|0:50:13-0:50:37|: “Eh, dependiendo del tamaño, es decir, son infinitos”, V-APa2-S3|0:50:18-0:50:23|: “Son infinitos, si trazo esta aquí se van uniendo con este punto y van haciendo triángulos infinitos [AP3: Ajá, sí, correcto; en su representación muestra dos casos (ver figura 75)]”, V-APa1-S3|0:50:25-0:50:27|: “Pero son triángulos esos [AP3: Sí]”. V-AP3-S3|0:50:34-0:50:36|: “Es que está en función a una perpendicular, esos triángulos”, la V-APa2-S3|0:50:39-0:50:43|: “Están en función a esta [señala el segmento consecutivo al ángulo A de su representación], van a ser infinitos”, V-APa2-S3|0:50:44-0:50:47|: “Y ahí puede tener la posibilidad de triángulos que usted quiera”.

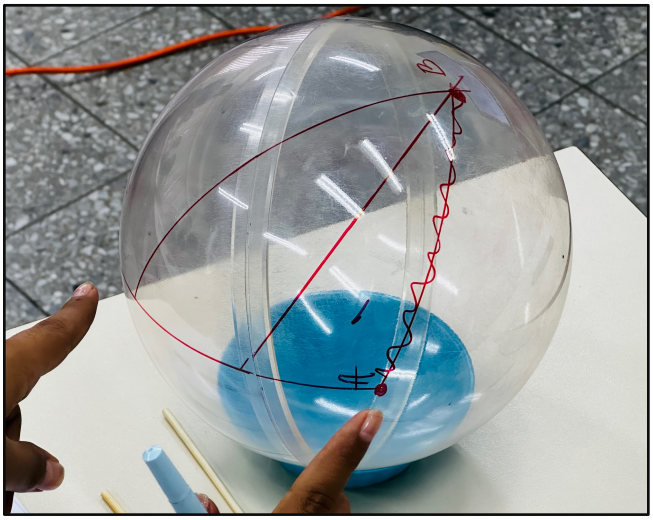


Figura 75. Construcción del equipo A para un lado fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-Sesión 3.

V-APa1-S3|0:51:16-0:51:25|: “Entonces este es fijo y a partir de ese se forman”, V-APa1-S3|0:51:42-0:51:47|: “Aquí hay uno de 90 [preguntaba por la medida del segmento fijo]”, V-AP3-S3|0:51:50-0:51:56|: “No, esa sería la circunferencia máxima en función al cual está haciendo los triángulos”, V-APa1-S3|0:52:00-0:52:02|: “Ah, entonces si tomamos la circunferencia máxima”, V-AP3-S3|0:52:02-0:52:11|: “Sí, esa es la máxima, en función a cómo está haciendo esos triángulos y el punto B vendría siendo el polo, en función a dónde está haciendo los triángulos”. El IP pregunta cuál es el segmento, V-APa1-S3|0:52:20-0:52:21|: “Ese que está señalado [el segmento AB de la figura anterior]”, al preguntar cuántos tenemos, V-APa1-S3|0:52:29-0:52:29|: “Infinitos”, V-AP3-S3|0:52:33-0:52:53|: “Porque esos triángulos los está formando en función a la circunferencia máxima y en este caso todos van a terminar en lo que sería el B que sería uno de los polos, en este caso, entonces, si lo hacemos en función a esa máxima con B, ahí usted podría crear infinitos triángulos”, V-AP3-S3|0:53:07-0:53:20|: “Igual yo pensaba en el caso más trivial que sería usando cualquiera de los dos polos y hacer triángulos rectángulos, si yo hago ese caso trivial van a salir infinitos triángulos rectángulos”, el IP pregunta: “Cuál sería el ángulo recto”, V-AP3-S3|0:53:24-0:53:48|: “En que iría en función a la circunferencia máxima [segmento que interseca al

segmento fijo en A, está indicando que todas las interseccionesen ese segmento son perpendiculares]… si usted lo empieza a trazar va a tener infinitos rectos, porque los está haciendo todos en función a la circunferencia máxima", el IP pregunta y estos [señala los otros dos ángulos] cuánto van a sumar si este es recto, V-APa1-S3|0:53:57-0:53:58|: "90 tienen que sumar[generalización euclidiana][AP3: 90]".

En la DG, al preguntar cuántos triángulos diferentes se pueden construir en la esfera dado un segmento fijo, la V-APa1-S3|1:10:33-1:10:34|: "Infinitos", el V-AP3-S3|1:10:35-1:11:48|: "Infinitos también, igual al momento en el que yo hago los triángulos en función a la circunferencia máxima; si yo muevo los ángulos, de manera perpendicular se forman infinitos triángulos". Después de la participación de BP1, donde menciona que descubrieron que los ángulos internos de los triángulos esféricos suman más de 180 grados, el IP le pregunta a APa1 sobre lo que piensa de eso [porque la APa1 había dicho que debían sumar 180 grados, igual que el plano]. La V-APa1-S3|1:12:35-1:12:36|: "Escuchándolo veo que no".

Caso 2: Dos elementos fijos (seleccionaron: LL)

Plano

(T3) En la DE, el V-AP3-S3|1:28:19-1:28:46|: "Ahí, ese ángulo no importa [APa2: Se puede abrir más], sí [refiere a que el ángulo entre los dos segmentos no es fijo], el rollo es, aquí, no, perdón, estos son los que no importan, los dos, este es el que importa [refiere al ángulo entre los dos lados fijos], porque no puede llegar a ser 180. Ahí usted lo puede estirar todo lo que pueda, pero si se hace 180, ya pierde el sentido del triángulo". La V-APa1-S3|1:28:51-1:29:11|: "Pero estos dos grises son los fijos o qué". V-AP3-S3|1:28:56-1:28:46|: "Al tener dos lados fijos, son del mismo tamaño [menciona que los dos lados fijos seleccionados son del mismo tamaño]. Se fijó o no [APa2: No], ¿son del mismo tamaño? [APa2: No]".

(T4) V-AP3-S3|1:29:46-1:30:19|: "También se pueden formar infinitos, pero que el ángulo superior, o el ángulo formado por los dos segmentos, sí, el ángulo formado por los dos segmentos fijos tiene que estar, no puede ser menor que 180, no puede ser mayor o igual que 180 sería, tiene que ser a fuerza menor que 180", APa1-S3|1:30:21-1:30:28|: "Puede ser infinitos porque, porque bueno estos se unen, este cambia, este no, este no", V-AP3-S3|1:30:28-1:30:59|: "Solo que no sé, al ser esos dos lados fijos si no los puede cortar [APa2: No lo puede cortar], no se puede sobreponer, este si lo puede estirar cuanto usted quiera, pero como le digo entre estos dos se vaya haciendo el ángulo más grande va a llegar un punto en que va a tender a esto, va a ser así y ahí ya no sería triángulo, entonces se puede poner de tal manera que este ángulo formado por esos dos fijos no sea 180".

(T3) El IP les pregunta: "Dado esos dos elementos fijos, ¿qué se puede decir de los otros elementos?", AP3-S3|1:31:15-1:31:17|: "Sí, esa apertura no puede ser 180, tiene que ser menor que 180". Al preguntar por los otros ángulos, AP3-S3|1:31:27-1:31:54|: "Igual, estos no pueden ser menores que 180 porque al ser 180 se perdería la composición del triángulo. Como estos solo tienen este lado móvil, este sí lo puede estirar lo que usted quiera, pero a medida que este ángulo que vaya aperturando más va a ir tendiendo a ser 180, entonces dejaría de ser un triángulo. Ahí todavía, mientras no sea 180, se puede hacer un triángulo".

El IP pregunta: “¿Puedo decir algo de este lado en dependencia de estos dos [los dos fijos]?”, APa1-S3|1:32:13-1:30:28|: "Si lo pone así, ahí son 180, digamos, tendría que abarcar de vértice a vértice [refiere a la suma de los dos fijos (ver figura 76)], como la misma, que la suma de estas dos tendría que ser [refiere a la desigualdad triangular, la cual menciona explícitamente en sus HT (ver figura 77)]”. El IP pregunta si puede ser mayor, APa1-S3|1:32:39-1:32:40|: “No”, AP3-S3|1:32:40-1:32:50|: “No sí, mayor puede ser esta [el IP aclara que se puede prolongar, pero siempre formando un triángulo], ahh no”, AP3-S3|1:32:55-1:32:56|: “Está condicionado a esos dos”. El IP: “Cuántos triángulos se pueden formar”, AP3-S3|1:33:22-1:33:23|: “Infinitos también”.

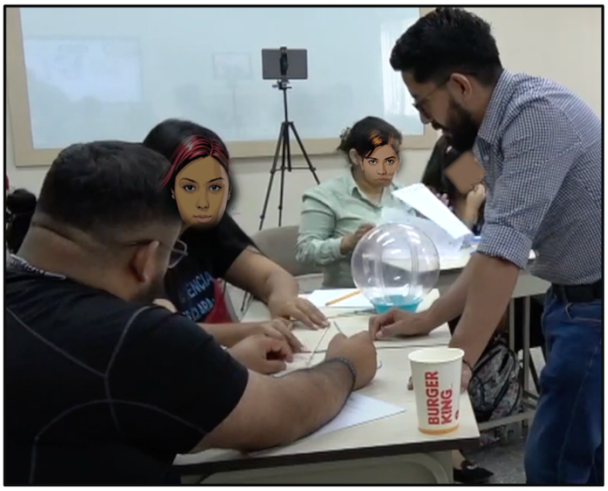


Figura 76. APa1 muestra la desigualdad triangular en el plano. Fuente: Video-sesión 3.

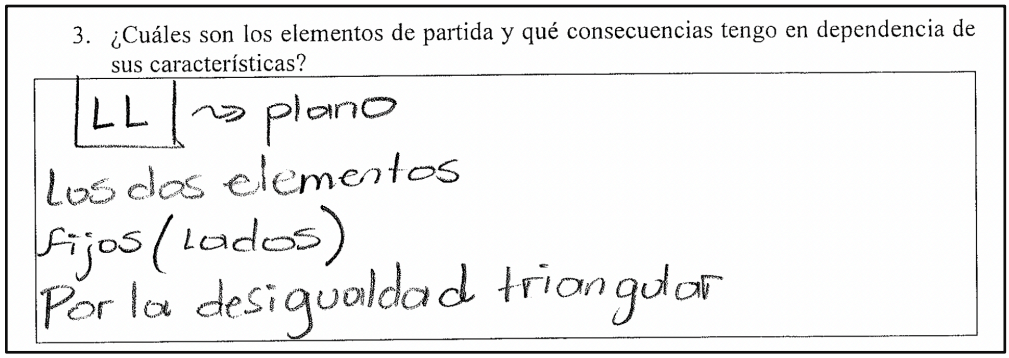


Figura 77. Respuesta por APa1 de la T3. Fuente: HT.

En sus HT, la APa2 describe la desigualdad triangular y justifica la infinitud de los triángulos por el cambio, extenderse o comprimirse, del lado restante (ver figura 78). Esto también lo presenta el AP3 (ver figura 79). El IP: “Cuántos triángulos se pueden formar”, AP3-S3|1:33:22-1:33:23|: “Infinitos también”.

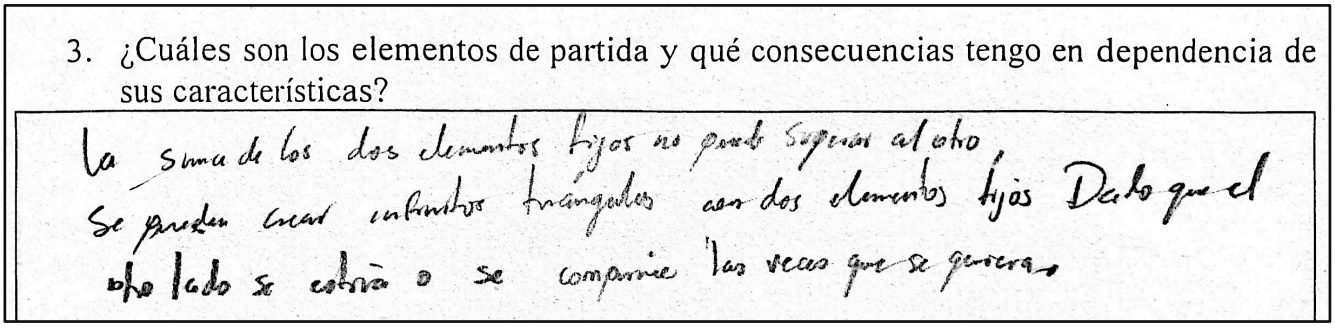


Figura 78. Respuesta por APa2 de la T3. Fuente: HT.

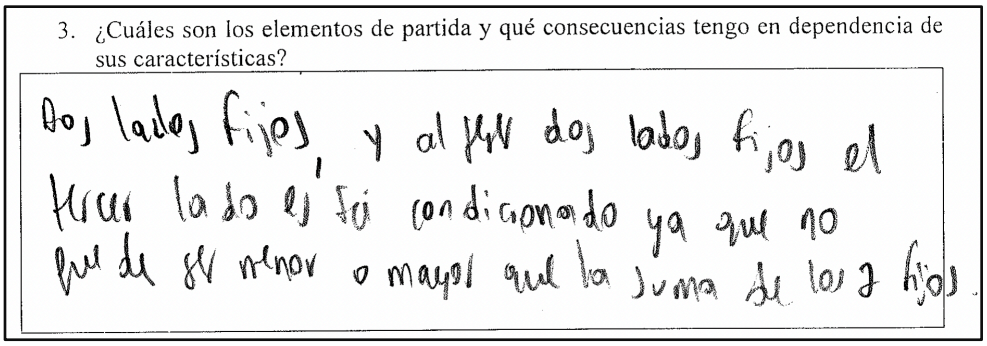


Figura 79. Respuesta por AP3 de la T3. Fuente: HT.

Esfera

(T4) Construyen y señalan los lados fijos. AP3-S3|1:34:09-1:34:12|: "El lado fijo era ese, uno; ahorita voy a poner este otro", AP3-S3|1:34:56-1:35:05|: "Solo que ese sería el móvil, ese es fijo [APa1: Estos dos son los dos fijos], ajá", AP3-S3|1:35:17-1:35:25|: "Digamos, póngale, tiene estos dos fijos, si los empieza a mover, a abrir, siempre se podría hacer infinitos", V-APa2-S3|1:35:31-1:35:51|: "Este, si tengo la misma abertura [refiere a que el ángulo entre los dos fijos puede variar igual que el plano], entonces este va a tener la misma distancia, entonces este podría ser este", AP3-S3|1:35:53-1:36:23|: "Sí, lo que yo pienso es que como es fijo este, entonces si estos dos son fijos y los empieza a abrir, este se va a ir moviendo acá, acá y acá; y va a ir haciendo más grande el triángulo [APa1: Pero esos no se pueden mover], no, esos si se pueden abrir así como acá [refiere al plano], es como que tenga estos dos acá así [en el plano], y los empiece a abrir, pero este si lo puede abrir más de 180 y se va a formar un triángulo, no hay problema [AP3 toma los palillos y hace el ejemplo (ver figura 80)]".

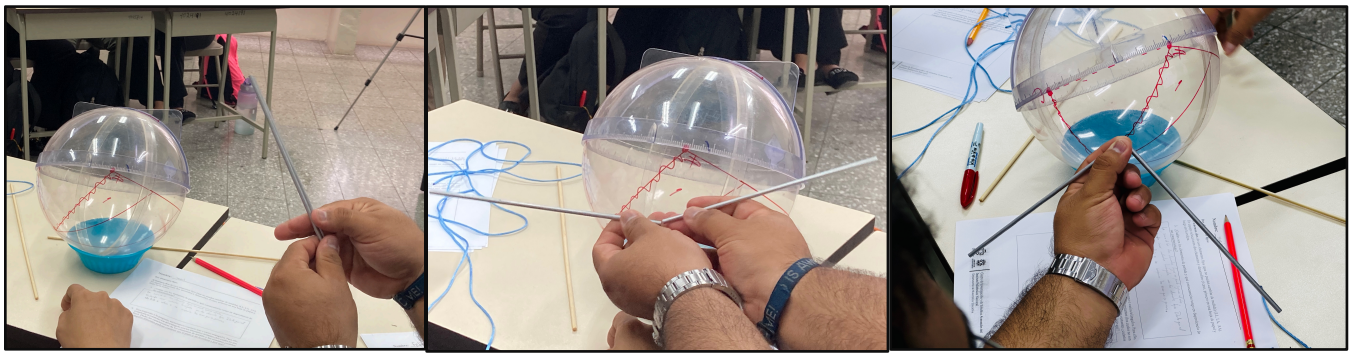


Figura 80. AP3 ejemplifica el cambio en la medida de un ángulo. Fuente: Fotografía-sesión 3.

APa1-S3|1:36:37-1:36:43|: "Pero aquí sería el menor segmento que se forme [AP3: La geodésica siempre], tendría que ser la geodésica", el AP3-S3|1:36:46-1:36:47|: "¿Influye ahí la geodésica también?". El IP les recuerda que los lados de los triángulos son geodésicas, AP3-S3|1:36:55-1:37:00|: "O sea, si tengo un triángulo en el que uno de los lados no sea geodésica, ¿no es triángulo?, [IP: No]", el IP recuerda que en el plano no se requiere esa especificación porque todo segmento es geodésica, AP3-S3|1:37:26-1:37:46|: "Sí, pero digamos, así como lo tenemos acá, estos dos aquí así, entonces si yo los empiezo a abrir y sigo pasando, me va a formar este otro acá, en toda la circunferencia [toma los palillos y ejemplifica (ver figura 81)], entonces, este de acá no sería

un triángulo [IP: En la esfera no (ver figura 82)], solo este de acá que sería la geodésica [señala el otro triángulo, IP: Sí]", el IP señala que entre dos vértices debe estar la distancia más corta entre ellos.

Figura 81. AP3 ejemplifica la abertura de un ángulo. Fuente: Video-sesión 3.

Figura 82. AP3 muestra una figura de tres lados rectos que no sería un triángulo en la esfera. Fuente: Fotografía y video-sesión 3.

(T4) AP3-S3|1:37:56-1:38:24|: "Siempre habría infinitos, pero podría jugar en eso porque tendría de esta forma y como de esta forma también. Igual, si solo deja uno y empieza a mover el otro también, siempre sería uno de los dos, siempre habría infinitos de igual manera, pero habría..., el ángulo ya no está limitado a 180, como en el plano, la composición del triángulo, lo que está limitado es a la geodésica, en este caso". Esta justificación la retoma la APa2 en sus HT, para justificar que hay infinitos triángulos en el plano y en la esfera (ver figura 83).

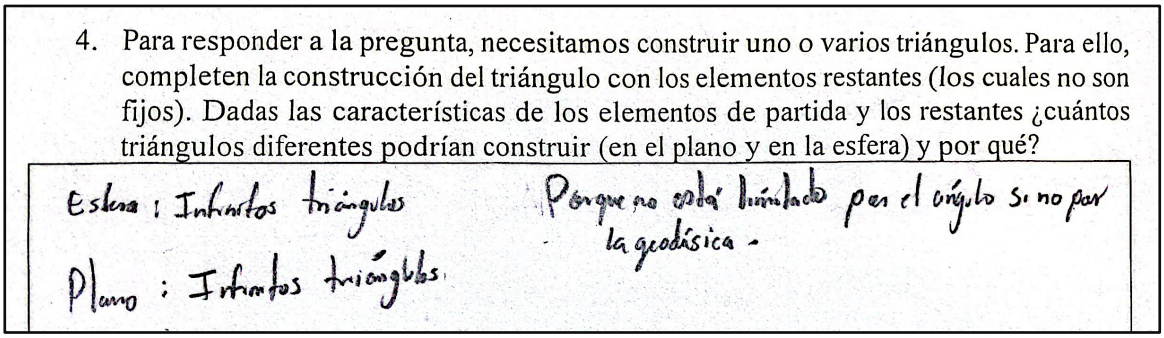


Figura 83. Respuesta por APa2 de la T4. Fuente: HT.

En la DG, después de escuchar la presentación del equipo C y B, el AP3-S3|2:03:00-2:03:47|: "Igual tenemos que son infinitos, la observación que hacíamos a [menciona el nombre del IP] es que, en el plano, pues igual son infinitos, pero estamos limitados al la composición del triángulo porque se pueden hacer hasta 180, pero

en la esfera en este caso no porque digamos si usted lo tiene así y después lo quiere hacer así [toma los palillos y hace la muestra (ver figura 84)], pero no está limitado a la medida del ángulo, sino a la medida de la geodésica, que tiene que ser el menor segmento, se puede formar este de acá [señala la geodésica del tercer lado] o se puede formar este de acá [señala el segmento más largo], pero este ya no sería un triángulo en la esfera, entonces, son infinitos, pero están limitados por la geodésica, tienen que ser a fuerza geodésicas para que sea un triángulo".

Figura 84. AP3 ejemplifica que los ángulos en la esfera pueden medir más de 180 grados. Fuente: Video-Sesión 3.

Caso 3: Tres elementos fijos (seleccionaron LLL)

Plano

En la DE, la APa2 hace la construcción del triángulo con los tres lados fijos, intenta cambiar los ángulos, pero reconoce que al cambiar los ángulos los lados fijos no se mantienen, por lo que vuelve a construir el triángulo inicial (ver figura 85). Ante ello, el AP3-S3|2:16:58-2:17:11|: "Sí, solo uno se puede hacer [APa1: Porque son fijos, ¿verdad?], sí, no los puede mover, no puede hacer nada [todo el equipo se ríe porque no pueden mover los lados]". (T5) El IP: "Dados esos tres lados fijos, de partida, ¿puedo decir algo de los ángulos?", el AP3-S3|2:17:45-2:17:46|: "Están fijos también [APa1: Están fijos]", el IP: "¿Por qué?", APa1-S3|2:17:51-2:17:56|: "Porque los lados no se pueden mover, no tienen movilidad". El IP: "Su triángulo pareciera que es equilátero, ¿lo es o no? [Porque seleccionaron lados casi del mismo tamaño]". El AP3-S3|2:18:05-2:18:07|: "No, son diferentes". (T6) El IP: "Entonces, ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?", el AP3-S3|2:18:13-2:18:13|: "Uno", APa1-S3|2:18:14-2:18:16|: "Si tengo los tres lados fijos".

Figura 85. APa2 construye un único triángulo dado los tres lados fijos. Fuente: Video-sesión 3.

(T5 y T6) En la DE, V-APa2-S3|2:18:24-2:18:40|: “Tienen que cerra en un punto, [AP3: Cuál puso primero, ese], este, [AP3: Es porque creo que hay que poner los tres de un solo], si van a cerrar”, el AP3-S3|2:18:46-2:18:48|: “Ahora hay que ver si cierra ahí, al otro punto”, marcan los puntos de los segmentos y los nombran A, B y C. El AP3-S3|2:18:57-2:19:39|: “No sé, habría que probar con poner los tres de un solo, vamos a ver, yo voy a agarrar este de acá, ahí, [cada uno toma un lado e intentan conectar los extremos manteniendo tensa la cuerda], [APa1: El lado suyo es igual que el mío creo], no, este es más chiquito, [APa1: Son desiguales todos, verdad], sí, pero habría que ver el punto a donde llega, ese se tiene que marcar, a ese punto, ¿y cómo lo marcamos? [se ríen porque los tres están usando sus dos manos y no pueden marcar los vértices], lic., ayúdenos a marcarlo [piden ayuda a una de las profesoras de práctica (ver figura 86)]”, esto también lo registró el investigador-observador (ver figura 87). APa1-S3|2:19:40-2:19:45|: “Pero ese punto donde [menciona a APa2] no debería de llegar, así encima, así como [APa2: ¿Hacer qué?] [la profesora de práctica les pregunta: ¿Dónde quieren que les marque?]”.

Figura 86. El equipo A solicita apoyo a la profesora de práctica para marcar los lados esféricos. Fuente: Fotografía-sesión 3.

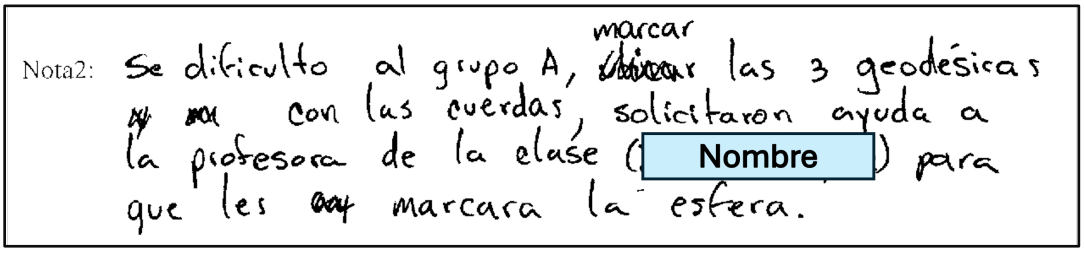


Figura 87. Nota de investigador-observador sobre la intervención de la profesora de práctica. Fuente: NIO.

Al desarmar la esfera, la profesora de práctica les dice: mejor ya no les ayudo, usen la regla, sacar un segmento; con la regla lo marcan y luego los otros, el AP3-S3|2:20:21-2:20:24|: "Ah, sí, hay que marcar el más largo entonces”. Marcan un segmento y nombran los extremos como punto A y B (ver figura 88), APa1-S3|2:21:26-2:21:40|: “Marque aquí [AP3: Aquí, este], hasta aquí, ¿verdad? [AP3: No, marque este punto y ahí, sí,

con la regla, ese va para acá y el otro va para acá]". Finalmente, marcan los tres puntos y colocan las cuerdas para verificar (ver figura 89).

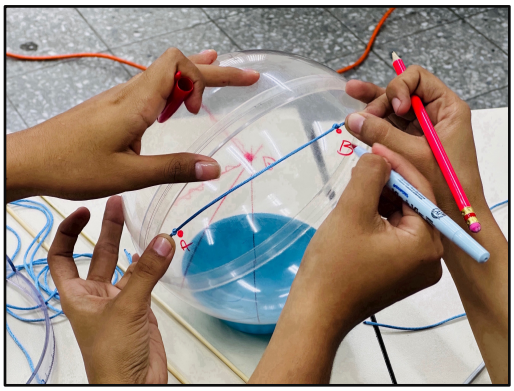


Figura 88. El equipo A marca un segmento. Fuente: Fotografía-sesión 3.

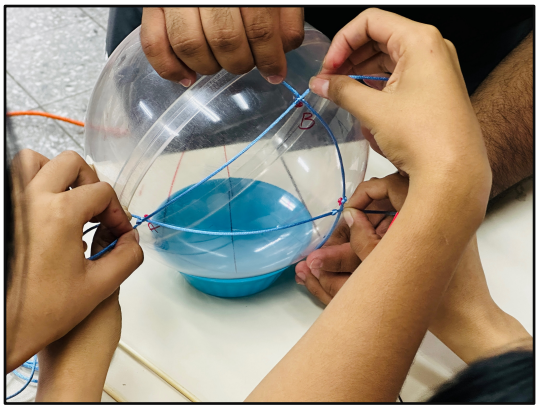
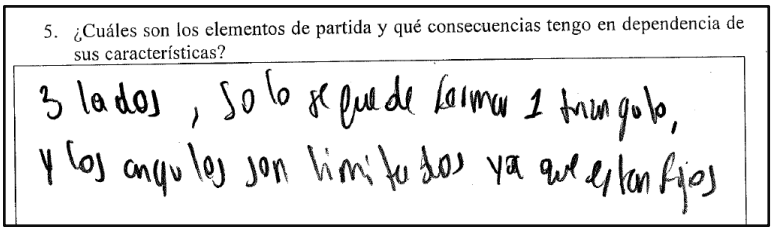


Figura 89. El equipo A marca los vértices del triángulo formado por tres lados fijos. Fuente: Fotografía-sesión 3.

(T6) APa1-S3|2:22:22-2:22:23|: "Entonces solo se puede formar uno", el AP3-S3|2:22:23-2:20:26|: "Ahora los tres lados son fijos", APa1-S3|2:22:30-2:23:00|: "Solo uno [refiere a la cantidad de triángulos], sí, porque igual tiene que ser geodésicas, porque se puede hacer aquí como dice él, pero no… yo creo que en el fondo deben ser las magnitudes, [APa2: No necesariamente], pero igual como estábamos hablando de la desigualdad triangular…, la suma de estos dos debe ser mayor que este", APa1-S3|2:23:14-2:23:54|: "La suma de estos dos debe ser mayor que este, la suma de estos dos debe ser mayor que la longitud de este al igual que, si me entienden, porque por ejemplo [menciona a APa2], usted los pusimos al azar, como que lo fuimos midiendo para que marcara punto a punto… se debe descubrir creo yo la desigualdad triangular, solo uno, sí, pero como se forma, dado la desigualdad triangular", APa1 reconoce cada lado en la esfera y luego los coloca en el plano [como cuerdas tensas] para verificar la desigualdad triangular (ver figura 90). El AP3-S3|2:24:04-2:24:11|: "Siento que tiene sentido porque al ser en la esfera".

Figura 90. APa1 verifica la desigualdad triangular para triángulos esféricos. Fuente: Video-sesión 3.

En la DG, el IP pregunta lo que pasó en el plano y en la esfera, APa1-S3|2:47:05-2:48:27|: "Bueno, pues con estos lados solo podemos construir un triángulo en el plano, por ende, si los lados están fijos, también sus ángulos son fijos; si no se están moviendo los lados, los ángulos también se mantienen fijos [esto lo describe en sus HT (ver figura 91)]. En la esfera, igual formamos un solo triángulo, solamente que vimos la particularidad, notamos que cuando hicimos las construcciones de los lados del triángulo en la esfera, deben tener ciertas características para poder formar lo que es el triángulo, entonces hay que saber las longitudes, así como en el plano se da la desigualdad triangular, como se cumple verdad, que la medida de dos lados, la suma de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado y también lo pudimos ver en la esfera; qué quiere decir eso, que no pusimos al azar, al punto que calzara justamente, probamos eso, que la suma de dos lados es mayor que el tercer lado en la esfera", el IP pregunta si en la esfera también es un triángulo único, el AP3-S3|2:48:42-2:49:11|: "Igual… igual también tiene que ver lo de la geodésica, porque para formar el triángulo tiene que ser geodésica, si yo trazo los otros, como solo tengo fijo esos tres lados al ser esos tres lados fijos, tienen que ser tres lados geodésicas, entonces siempre van a estar como limitados a ser esos lados más cortos".


5. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características?

3 lados, solo se puede formar 1 triangulo, y los angulos son limitados ya que estan fijos

Figura 91. Respuesta por APa1 de la T5. Fuente: HT.

Cuando el CP2 estaba presentando su caso y mencionaba que los triángulos que tenían los mismos ángulos en el plano eran infinitos e isósceles, el IP le pregunta si tenían alguna característica que los relacionara, APa1-S3|2:50:11-2:50:12|: "Son semejantes". Al preguntar de dónde podemos deducir esos triángulos, APa1-S3|2:50:23-2:50:24|: "De las paralelas". Al finalizar las presentaciones, el IP pregunta si les gustaría trabajar el caso que faltó, AAL. Todos los equipos, tanto en el plano como en la esfera, aceptaron trabajarlo.

Caso extra: Tres elementos fijos (LAA)

Plano

(T5 y T6) El AP3-S3|3:02:00-3:02:02|: “Un lado, ángulo, ángulo”, APa1-S3|3:02:05-3:02:07|: “Un lado fijo y dos ángulos”, AP3-S3|3:02:33-3:02:40|: “90, es un rectángulo, igual solo se puede formar uno [la APa2 y el AP3 hacen la construcción de la figura 92]”, V-APa2-S3|3:02:41-3:02:43|: “Sí porque están condicionados [refiere al resto de los elementos]”.

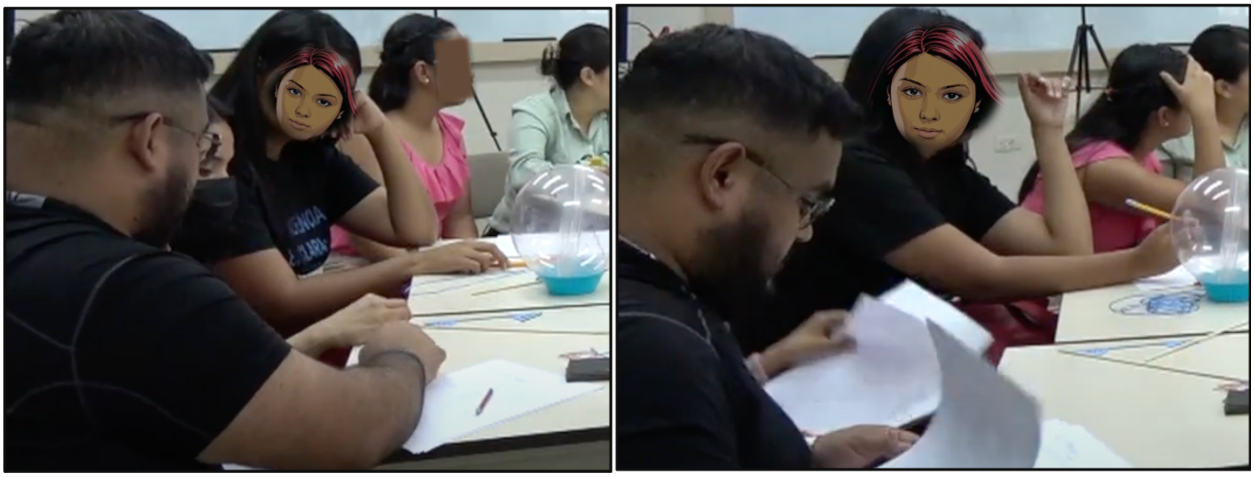


Figura 92. Construcción del equipo A para el caso LAA. Fuente: Video-sesión 3.

Esfera

(T5 y T6) El AP3-S3|3:03:20-3:03:53|: “¿Y en la esfera?..., y con un lado, ese es el rollo, ah, es que el lado hay que marcarlo, ¿verdad?”. Trazan el lado y marcan los puntos de inicio y final con las letras C y D (ver figura 93). AP3-S3|3:04:56-3:04:59|: “Solo es el lado fijo [APa1: Los otros dos lados se están moviendo]”. El AP3-S3|3:05:29-3:07:03|: “Me espera, me espera, no va a quedar, dele, póngalo, sí, en teoría sí, pero, ah, pues sí, salió pando [la recta trazada con la regla no salió continua (ver figura 94)], [APa2: Coloque un puntito acá; refiere a colocar un punto en el lado del ángulo de 45 grados para mantener la abertura (ver figura 95)], no, deslícelo ahí, ese está bueno, pero el otro está malo. Es con el de 60, no, pero aquí no le puso el de 45, pues [APa2: Sí, este tiene 45], pero este es el otro, es que ese es el rollo, este era [solicitan cuerdas y usan la regla esférica como una recta completa (ver figura 95)]”.

Figura 93. El equipo A traza el segmento CD. Fuente: Fotografía-Sesión 3.

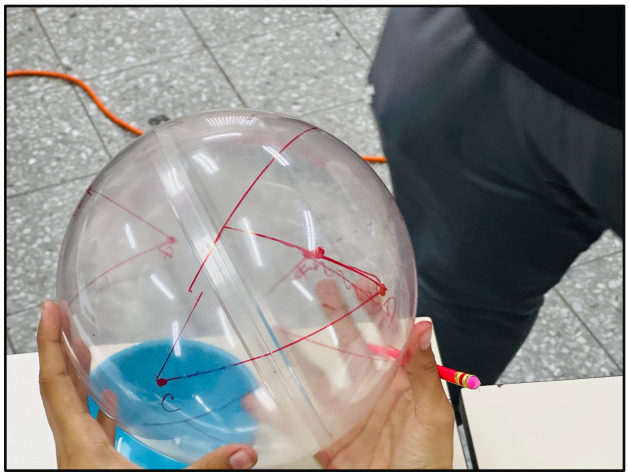


Figura 94. El equipo A traza una recta discontinua. Fuente: Fotografía-sesión 3.

Figura 95. El equipo A traza un punto para mantener la abertura de un ángulo. Fuente: Fotografía-sesión 3.

APa1-S3|3:07:46-3:07:55|: "Entonces este está fijo, este también [AP3: Y ese también, pero igual solo se puede formar uno]". En la DG, al preguntar lo que pasó en el plano y en la esfera, todo el grupo dijo que solo un triángulo.

(T7) Después de dar la indicación, AP3-S3|3:23:26-3:23:33|: "O sea, sería como induciendo a la semejanza, dice usted". En la DG, ante la pregunta, el AP3-S3|3:31:34-3:31:49|: "Yo le puse que sí, yo considero que por los dos lados que tengo y el ángulo, por simple trigonometría puedo encontrar el otro ángulo y siempre van a ser el mismo [esto lo describe en sus HT (ver figura 96)]". En sus HT, APa1 presenta los dos casos que trabajaron como criterios de congruencia de triángulos (ver figura 97).

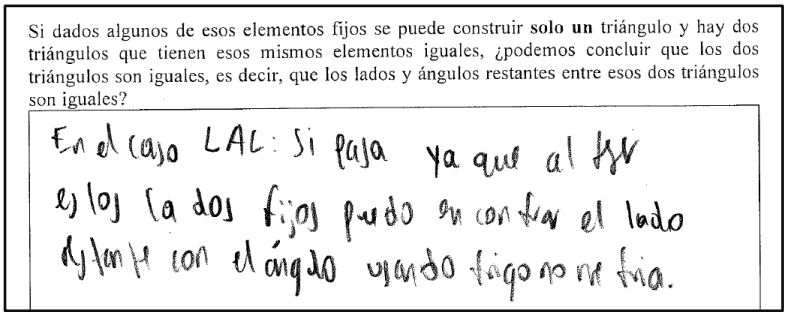


Figura 96. Respuesta por AP3 de la T7. Fuente: HT.

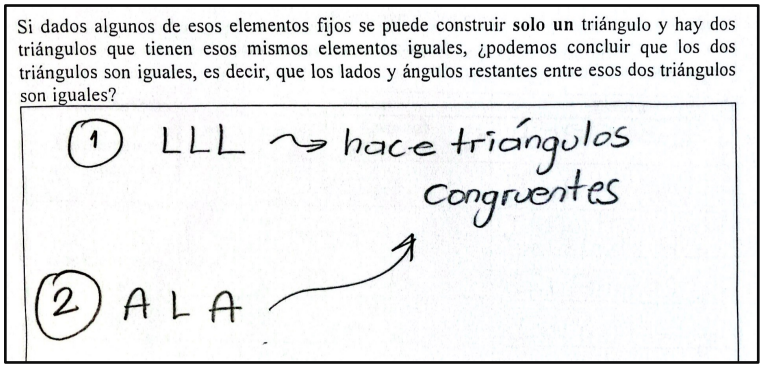
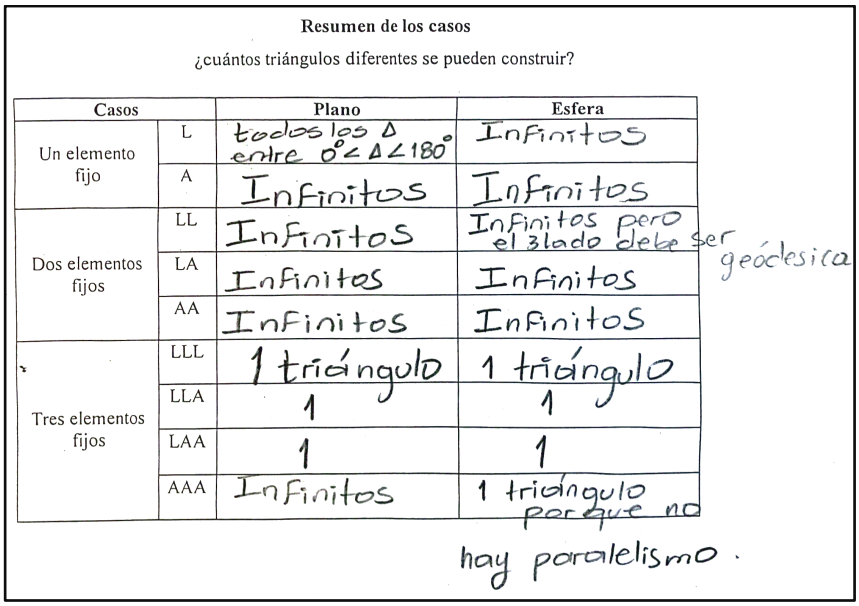


Figura 97. Respuesta por APa1 de la T7. Fuente: HT.

En su tabla resumen, la APa1 justifica el criterio AAA para triángulos esféricos a la no existencia del paralelismo en la esfera (ver figura 98). Por su parte, la APa2 justifica el caso AAA en el plano por la semejanza, que antes habían asociado al paralelismo, y en la esfera a la no existencia del paralelismo (ver figura 99).

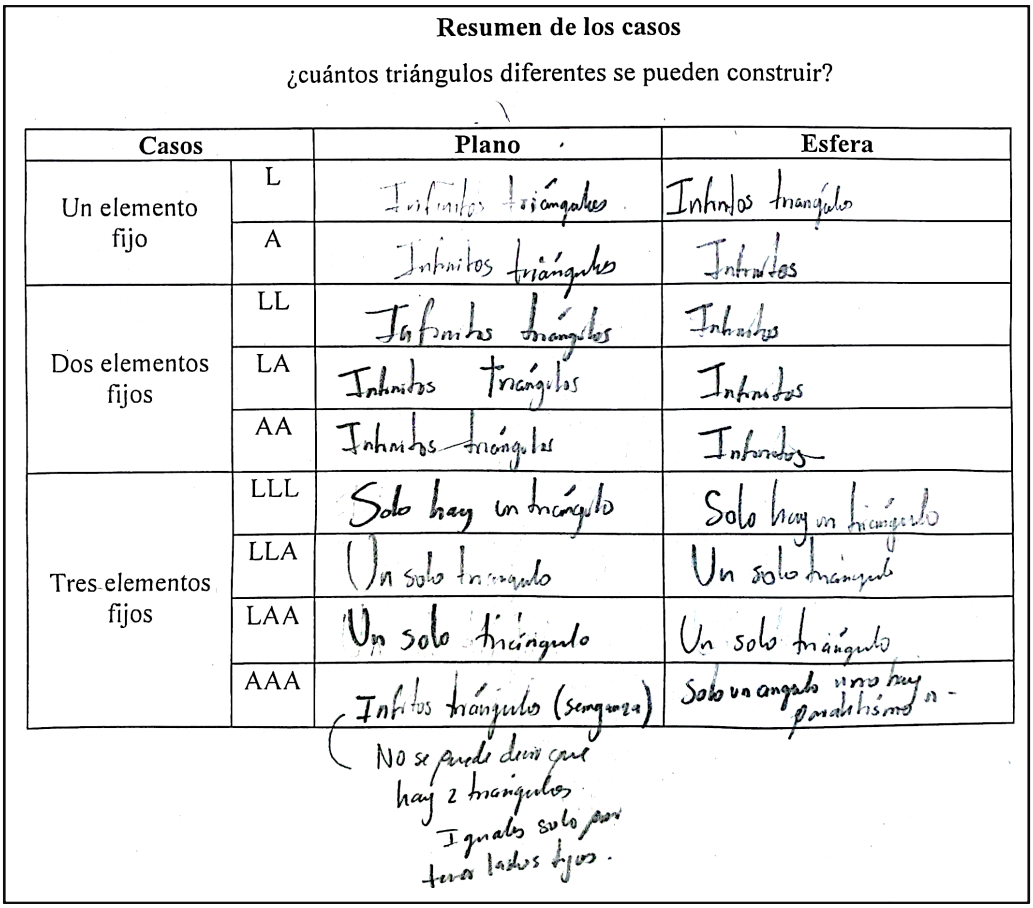


Resumen de los casos

¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?

Casos		Plano	Esfera
Un elemento fijo	L	todos los Δ entre $0° < \Delta < 180°$	Infinitos
	A	Infinitos	Infinitos
Dos elementos fijos	LL	Infinitos	Infinitos pero el 3lado debe ser geodésica
	LA	Infinitos	Infinitos
	AA	Infinitos	Infinitos
Tres elementos fijos	LLL	1 triángulo	1 triángulo
	LLA	1	1
	LAA	1	1
	AAA	Infinitos	1 triángulo porque no hay paralelismo.

Figura 98. Tabla resumen por APa1. Fuente: HT.



Resumen de los casos

¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?

Casos		Plano	Esfera
Un elemento fijo	L	Infinitos triángulos	Infinitos triángulo
	A	Infinitos triángulos	Infinitos
Dos elementos fijos	LL	Infinitos triángulos	Infinitos
	LA	Infinitos triángulos	Infinitos
	AA	Infinitos triángulos	Infinitos
Tres elementos fijos	LLL	Solo hay un triángulo	Solo hay un triángulo
	LLA	Un solo triángulo	Un solo triángulo
	LAA	Un solo triángulo	Un solo triángulo
	AAA	Infinitos triángulo (semejanza) No se puede decir que hay 2 triángulos Iguales solo por tener lados fijos.	Solo un ángulo pero hay paralelismo

Figura 99. Tabla resumen por APa2. Fuente: HT.

Equipo B:

Caso 1: Un elemento fijo (seleccionaron: L)

Plano

(T1) El equipo B seleccionó un segmento. En la DE, V-BP1-S3|0:12:16-0:12:24|: "Sí es recto este debe ser agudo [BPa3: Sí], y este también es agudo", V-BP1-S3|0:13:33-0:13:46|: "El elemento que está fijo es este, pueden cambiar los otros lados y los tres ángulos, entonces estamos viendo los ángulos ahorita", V-BP1-S3|0:13:47-0:14:40|: "Ángulo, cómo varían los ángulos, este ángulo, si es agudo, es que hay que ponerle nombre [BPa3: Colóquele nombre], si el ángulo A es agudo el ángulo B puede ser recto, puede ser agudo o puede ser obtuso [hace la representación del segmento fijo en el plano, nombra sus extremos y muestra en sus HT esta proposición (ver figura 100)]", V-BPa3-S3|0:14:44-0:14:45|: "¿Y de 180?, no verdad", V-BPa2-S3|0:14:45-0:14:50|: "No, porque la suma de los ángulos internos es 180, no se formaría". V-BP1-S3|0:14:56-0:15:14|: "Esta es la condición: si el ángulo A es agudo, ¿cómo va a ser el ángulo B? El ángulo B llano no puede ser porque ya no forma un triángulo, pero puede ser obtuso, puede ser recto y puede ser agudo".

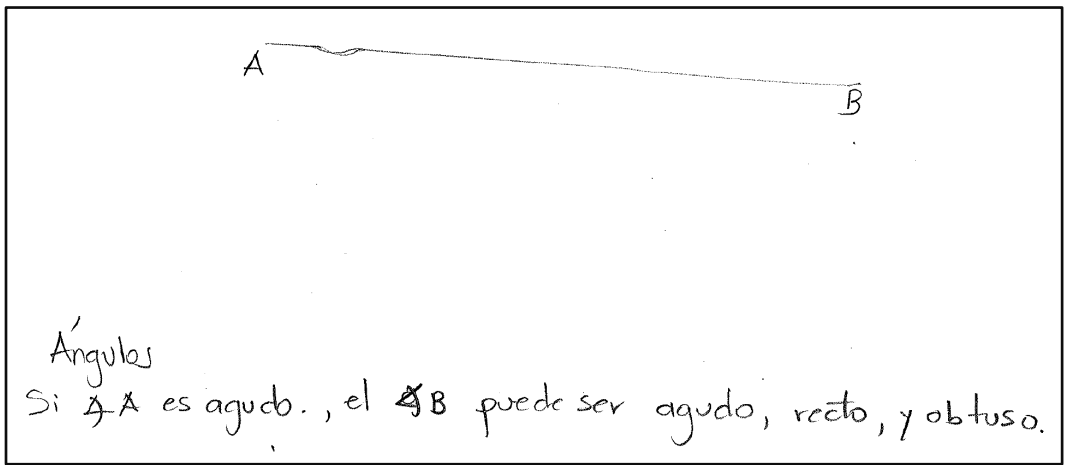


Figura 100. BP1expone casos dado un segmento fijo. Fuente: HT.

(T2) En la DE, para responder a la pregunta general para el plano, el V-BP1-S3|0:23:57-0:23:59|: "Aquí ya hay otro triángulo [APa3: A dónde]". El V-BP1-S3|0:24:47-0:24:48|: "Es que no sé si son infinitos", BPa3-S3|0:24:50-0:25:00|: "¿Finitos o infinitos?, porque sigue todavía hasta llegar a", el V-BP1-S3|0:25:00-0:25:25|: "Este es un triángulo, este es otro triángulo, y si yo pongo este recto [BPa3: También es un triángulo], [BPa2: De cuántas formas posibles], este ángulo puede ser casi llano y esta extenderse hasta allá [BPa3: Sí, porque sigue]", el V-BP1-S3|0:25:34-0:25:38|: "Entonces, un elemento fijo son infinitos". Cuando el IP les pregunta a qué conclusión llegaron, el V-BP1-S3|0:25:49-0:25:59|: "Infinitos, según nosotros son infinitos, [IP: ¿Por qué?], pero es que no sé, porque aquí estamos moviendo, estos dos se extienden hasta donde usted quiera". El IP pregunta: "¿Y los ángulos?", el V-BP1-S3|0:26:07-0:26:46|: "Bueno, este ángulo se puede mover hasta antes de 180, pero no puede llegar a ser 180... para formar un triángulo. Cuando llega a formar el ángulo de 180, ya no se forma un

triángulo". En sus HT, la BPa2 muestra una centración en el cambio de los segmentos y justifica que los triángulos serán infinitos (ver figura 101).

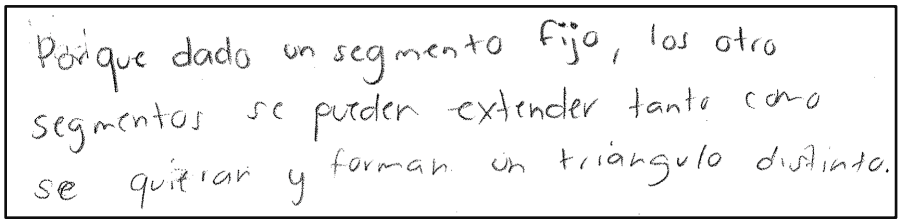


Figura 101. BPa2 justifica infinitos triángulos dado un segmento fijo. Fuente: HT.

V-BPa3-S3|0:27:25-0:27:31|: "Primero es el lado, entonces, es finito o infinito". El V-BP1-S3|0:27:31-0:28:15|: "Es que este lado está fijo, este es el elemento fijo, pero la pregunta es cuántos triángulos diferentes se pueden construir en el plano y hay infinitas opciones ahí, o sea, el ángulo se ve limitado… el porqué". En la DG, el V-BP1-S3|0:34:24-0:35:23|: "Bueno, dado un segmento fijo, nos dábamos cuenta de que estos dos lados podrían moverse tanto como quisiéramos, hacia un lado o hacia otro. Los lados no se ven limitados, porque los lados se pueden extender tanto como nosotros queramos; los que se ven limitados son los ángulos, porque el ángulo puede ser obtuso, pero hasta cierta medida, hasta cierto punto, porque si ya se forma, si se llega a formar un ángulo de 180 grados, ya se pierde la composición de lo que es un triángulo, entonces, ya no se puede formar un triángulo. Pero, dado este segmento, se pueden formar infinitos triángulos".

Esfera

(T2) En la esfera, DE, el V-BP1-S3|0:55:05-0:55:23|: "Serían infinitos también", V-BPa3-S3|0:55:10-0:55:13|: "No, finitas acuérdese, no serán finitas", el V-BP1-S3|0:55:21-0:55:30|: "Es que es lo mismo [BPa3: Lo mismo sería, sí], es que igual acá puede ser obtuso y otro segmento", V-BPa3-S3|0:55:52-0:55:54|: "Es que mire que se forman varios ángulos", el V-BP1-S3|0:56:10-0:56:52|: "Vamos a ver, si yo tengo este acá y trato de extenderlo, extenderlo, todo, todo, todo; porque en estas, decíamos que estas cosas se extendían, ¿verdad?, [BPa3: Por eso le decía que aquí, será que no] [a esto se refería cuando decía que eran finitas, a que las rectas eran finitas], es cierto, si usted extiende va a poner acá [llegar al inicio] y si extiende este va a llegar acá, entonces, se forma un triángulo acá, y se va a formar un ángulo también acá, se forman dos triángulos… ya van a ver que se va a formar", estaba esperando la regla, el V-BP1-S3|0:57:00-0:57:02|: "O necesitamos un cordón más grande", el V-BP1-S3|0:57:00-0:57:22|: "Pero es que se van a formar dos triángulos [está pensando en el trazo de tres rectas completas y los triángulos son opuestos]…, imagínense que este segmento de acá lo extienden todo", V-BPa2-S3|0:57:33-0:57:49|: "Pero aquí creo que no pueden ser infinitos porque, es cierto, la superficie es finita, no puede extender demasiado eso [BPa3: Pero el detalle es que aquí son triángulos], por eso", el V-BP1-S3|0:57:53-0:59:52|: "Lo que les digo yo es esto, extiendo este, este ángulo es agudo, puede ser recto, [BPa3: Ahí está recto], y puede ser obtuso; pero ya no puede ser así tampoco, porque aquí ya no se formaría el triángulo, entonces, pero lo que les estoy diciendo yo es que si completo toda esta vuelta [marcan la circunferencia completa], y si yo trazo

una acá, [BPa3: Creo que van a ser infinitos], sí, son infinitos iguales, porque este puede ser agudo acá, puede ser recto, puede ser obtuso, sí igual, es lo mismo que en el plano".

El IP pregunta, a qué conclusión llegaron, el V-BP1-S3|1:00:59-1:01:00|: "Igual, que son infinitos", el V-BP1-S3|1:01:04-1:01:38|: "Es que nosotros tratamos de hacer lo mismo [refiere a lo que hizo el equipo A, la construcción del equipo B se puede ver en la figura 102], y trazamos esta circunferencia máxima para ver que este ángulo igual puede ser agudo, puede ser recto o puede ser obtuso, entonces, se mantienen las mismas características que en el plano, pareciera, de que estos segmentos los puedo extender tanto como quiera, pero va a llegar a un límite el ángulo siempre, pero igual siempre, en este caso no sé si sería lo apropiado decir 180, pero en el caso de que se formen de llegar a la misma línea donde está la circunferencia máxima donde se encuentra el segmento". El IP le pregunta: "¿Por qué piensa que no es apropiado decir 180?", el V-BP1-S3|1:01:56-1:02:27|: "No sé, creo que tengo la noción de que aquí los ángulos no son iguales [el IP les recuerda que al caracterizar los ángulos ellos dijeron que eran iguales al plano], o sea, la cuestión es que en el triángulo, si formamos un triángulo acá en la esfera, siento que la sumatoria, que uno sabe que son 180 los tres, no se va a dar, pero no sé, no estoy tan seguro de eso".

Figura 102. Construcción del equipo B dado un lado fijo. Fuente: Fotografía-sesión 3.

En la DG, después de escuchar la opinión de AP3, el V-BP1-S3|1:11:14-1:12:24|: "Ah bueno, de los lados siempre se mantiene que son infinitos, pero lo justificamos con respecto a los ángulos, nosotros teníamos este segmento fijo, ahorita que se acaba de ir usted estaba viendo lo de los ángulos de 180, de que los triángulos en el plano se cumplen las propiedades de que los tres suman 180, pero entonces se nos ocurrió marcar dos perpendiculares, como los meridianos que pasan por la circunferencia máxima, por donde pasaría el segmento fijo, entonces trazamos la perpendicular y se tocan en un punto, este punto sería el polo, pero este ángulo si es perpendicular sería de 90, este de 90, entonces entre los dos sumarían 180, pero qué pasa con este ángulo [señala el tercer ángulo], entonces ahí la propiedad no se cumple".

Caso 2: Dos elementos fijos (seleccionaron: LA)

Plano

(T3 y T4) Seleccionaron un ángulo de 90 grados y un lado, el V-BP1-S3|1:38:35-1:39:25|: "Pero este puede ser hasta 89.99999, porque este puede extender, pero 90 no, entonces igual se puede formar infinitos, … Solo que los elementos es que los lados pueden ser tan largos como sean, pero los ángulos, si se fijan ustedes, este es 90, entonces este tiene que ser complementario [refiere a que los dos restantes deben ser complementarios], [BPa3: Tendrían que medir 45], pero igual son infinitos [BPa2: Sí, es cierto], porque de aquí yo puedo tener este ángulo, este otro, este otro; pero no puede llegar a 90". El IP: "Dados esos elementos fijos, ¿qué puedo decir de los otros elementos?" El V-BP1-S3|1:39:34-1:39:50|: "Bueno, los otros dos lados pueden ser tan grandes como sean o tan pequeños, bueno, tan pequeños no, este no puede llegar a ser el mismo que este, tiene que ser mayor [por ser la hipotenusa]". El IP: "Puedo decir algo de los otros ángulos", el V-BP1-S3|1:39:59-1:40:25|: "De los ángulos, bueno, dado que este es 90, tendrían que ser complementarios, cierto que este es 90, pero [el IP pregunta si deben ser suplementarios para llegar hasta 180], no, estos dos [señala los dos ángulos restantes], [IP: O sea que este no puede ser recto], ajá, este no puede ser recto, debe ser agudo".

(T4) El IP les pregunta por la cantidad de triángulos que se pueden construir, el V-BP1-S3|1:40:40-1:40:43|: "Infinitos, siempre siguen siendo infinitos". V-BPa3-S3|1:41:00-1:41:01|: "Este es el ángulo, ¿verdad?", V-BPa2-S3|1:41:01-1:41:02|: "No, ese es cuando fijemos tres; ahorita solo estamos fijando dos", V-BP1-S3|1:41:04-1:41:05|: "A nosotros nos toca lado y ángulo". V-BPa3-S3|1:41:00-1:41:01|: "Este es el ángulo, ¿verdad?", V-BPa2-S3|1:41:01-1:41:02|: "No, ese es cuando fijemos tres, ahorita solo estamos fijando dos", V-BP1-S3|1:41:22-1:41:34|: "A nosotros nos toca lado y ángulo… este está condicionado, si lo tengo así, ¿verdad?, este tiene que ser mayor a este, porque si es igual ya no se puede", V-BPa2-S3|1:41:35-1:41:45|: "No, es mentira porque [BPa3: Dejaría de ser] si es igual, sería isósceles [BPa3: Dejaría de ser]", V-BP1-S3|1:41:45-1:41:56|: "Es que sí, puede ser igual, pero mire, ya, este ángulo ya no se mantiene [APa3: Exacto]".

Esfera

(T3) V-BP1-S3|1:42:08-1:42:10|: "Ahora, en el coso este, hay que medirlo". Marcan el segmento y el ángulo en la esfera (ver figura 103). V-BP1-S3|1:44:25-1:45:11|: "Entonces lo mismo, este se extiende…, pero vamos a ver, este lado tiene que ser mayor a este, porque aquí ya dibujamos el ángulo y este se extiende. Aquí es donde mide 60 [la medida del ángulo seleccionado]; se extiende, pero igual que con el otro plano. Este, por ejemplo, tiene que ser mayor a este. Es que este ángulo del otro lado, para formar un triángulo, puede ser agudo, puede ser recto y puede ser obtuso". V-BP1-S3|1:45:21-1:46:01|: "Pero tiene que llegar hasta 180, igual llega hasta 180; yo estoy con los segmentos, pero igual se dan infinitos triángulos porque va graduando y se van a ir encontrando con este y este también puede ser tan pequeño y aquí siempre va a medir 60, entonces siempre son infinitos". La BPa3 utiliza esas ideas como argumento para hablar de la infinitud; sin embargo, reconoce que

están limitados por la composición del triángulo (ver figura 104). V-BPa3-S3|1:46:06-1:46:07|: “Conclusión, infinitos”.

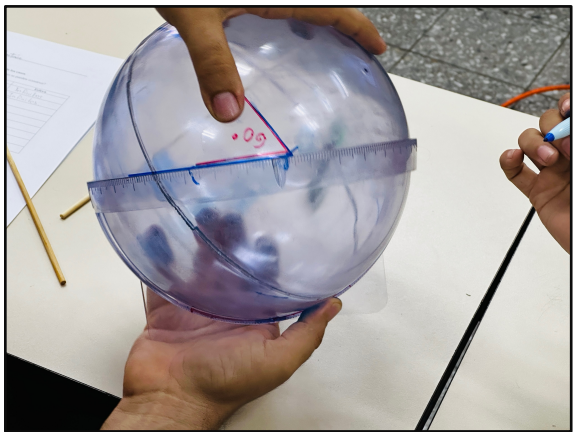


Figura 103. Construcción del equipo B dado un ángulo y un lado. Fuente: Fotografía-sesión 3.

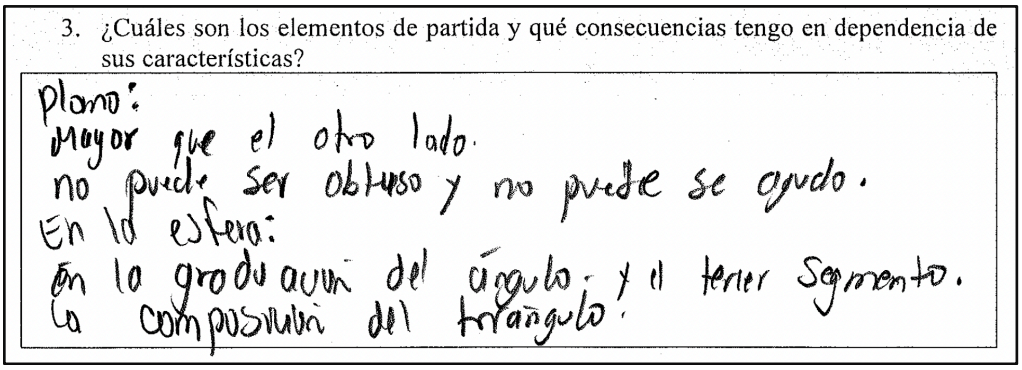


Figura 104. Respuesta por BPa3 de la T3. Fuente: HT.

(T4) El IP: “a qué conclusión llegaron”, V-BP1-S3|1:47:06-1:47:43|: “Igual, siguen siendo infinitos porque, por ejemplo, aquí tenemos el segmento y el ángulo, este ángulo puede extenderse y se va a mantener fijo [toma el ángulo del otro extremo del segmento fijo], entonces este otro segmento, puedo trazar otro segmento del punto B y puede ser menor que 180, verdad, pero puede haber infinitos triángulos moviendo ese ángulo, siempre se va a ir encontrando con este, entonces siempre van a ser infinitos”, V-BPa3-S3|1:47:49-1:48:01|: “Por qué ahora… el porqué usted lo dijo”, V-BP1-S3|1:48:06-1:48:35|: “Sí, tenemos el porqué, pero cuál es la palabra, aquí este otro lado, básicamente el tercer lado, hay infinitos triángulos porque el tercer lado puede variar en su ángulo tanto como, o la graduación del ángulo del tercer ángulo, del segundo ángulo, este es el ángulo fijo, [BPa3: Este sería el segundo]”, V-BPa2-S3|1:48:38-1:48:42|: “Este se puede extender hasta el momento en que se llega a alcanzar este de acá”, V-BPa3-S3|1:48:45-1:48:45|: “Entonces sería el segundo”, V-BP1-S3|1:48:47-1:48:48|: “Sí, porque este que se forma aquí es el tercero”. V-BP1-S3|1:48:51-1:49:10|: “Entonces, el segundo ángulo, ¿al trazar el segundo ángulo o al trazar el tercer segmento? [BPa3: Al trazar el tercer segmento], pero es que el tercer segmento varía conforme al ángulo, a la graduación del ángulo”.

Al escuchar la discusión del equipo A, V-BPa3-S3|1:49:50-1:49:51|: “¿Qué es la geodésica?”, V-BP1-S3|1:49:58-1:50:14|: “Es la distancia mínima entre dos puntos, la distancia mínima entre los dos puntos en la

esfera, pero en el plano, aquí yo tengo dos puntos y la distancia mínima en la recta, porque puedo tener este, pero no es la distancia mínima". V-BPa3-S3|1:50:21-1:50:22|: "Entonces, a la conclusión a la que llegamos, es lo que dijo usted". V-BP1-S3|1:50:23-1:50:35|: "Hay que poner eso, porque la graduación del segundo ángulo y con el tercer segmento", la V-BPa2-S3|1:50:51-1:50:53|: "Porque la graduación puede variar tanto como queramos".

En la DG, V-BP1-S3|2:02:28-2:02:51|: "De igual forma se forman infinitos triángulos, al mantener un ángulo y un lado fijo; en la otra contraparte del otro lado, el ángulo puede ir variando tanto como quiera, y encontrarse con el otro lado e ir formando infinitos triángulos".

Caso 3: Tres elementos fijos (seleccionaron LLA)

Plano

(T5) La V-BPa3-S3|2:24:11-2:24:42|: "Nos falta un lado, ¿verdad?, un lado nos falta [BPa2: A ver cuál nos da], no, nosotros tenemos que elegir, ¿verdad?, [menciona a BP1] no sé si un lado o un, [BPa2: No, él nos va a decir para que tengamos todos diferentes, nosotros que tenemos un ángulo [de 90 grados] y un lado, o nos puede dar otro ángulo], u otro lado, [BPa2: ¿Cuál trabajamos?], [BP1: Otro lado]". V-BP1-S3|2:26:12-2:26:42|: "Lado, lado y ángulo; pero y este ángulo, ¿dónde tiene que estar? Entre los dos lados, tiene que estar entre los dos [BPa3: Sí], porque si está acá no se puede formar, no se pueden formar triángulos y si está acá tampoco [prueba colocando el ángulo en los extremos], tiene que estar entre, eso es lo primero". V-BP1-S3|2:26:50-2:26:56|: "Sí, porque ahí no dice a dónde, porque dice lado, lado, ángulo".

El IP les indica que pueden colocar el ángulo donde gusten, es decir, ALL, LAL, LLA; V-BP1-S3|2:27:03-2:27:21|: "Pero eso nos estábamos dando cuenta, de que el ángulo tiene que estar acá [entre los lados, el IP: Por qué], tendría que tener el segmento acá, [BPa2: Es que es fijo]". El IP pregunta si puede estar LLA, V-BPa2-S3|2:27:40-2:27:41|: "Si son fijos no se puede", V-BP1-S3|2:27:41-2:27:51|: "Aquí sí, [BPa2: Ahí sí], por qué el otro no [coloca LLA (ver figura 105)]". EL IP: "Dado esos elementos que tienen de partida, ¿qué podemos decir de los otros elementos?", el V-BP1-S3|2:28:24-2:29:05|: "Bueno, los otros, dado que este mide 90, lo mismo, que estos tienen que ser complementarios [que los otros dos ángulos deben sumar 90 grados]. Este segmento [el tercero], ya se ve delimitado, tiene que tener una medida exacta para formar el triángulo, porque si ya lo hago más, o sea, esta sería la medida exacta para formar el triángulo, que si mide más, ya no; si mide menos, tampoco, entonces la longitud del tercero estaría condicionada".

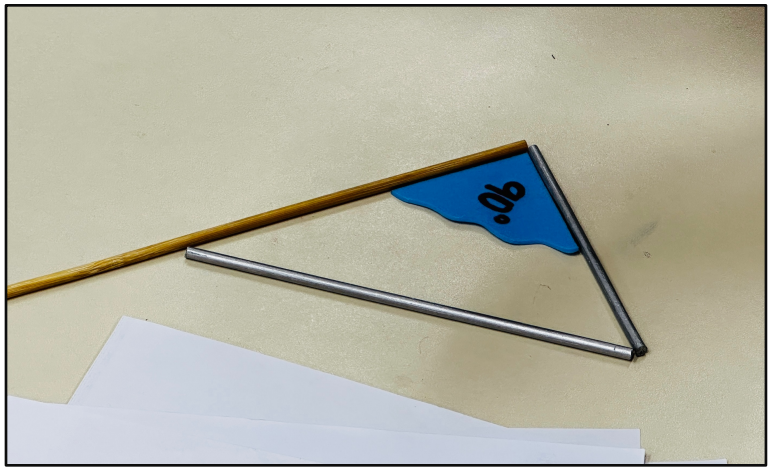


Figura 105. Construcción del equipo B para el caso LLA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.

(T6) El IP: “Me está diciendo que solo se puede construir un triángulo”, V-BP1-S3|2:29:12-2:29:18|: “Sí, porque si lo pongo en medio de estos dos también solo se puede formar uno”, V-BPa2-S3|2:29:29-2:29:37|: “Es cierto, al principio decía que se podían formar más, pero me acordé después que estos dos estaban fijos y es cierto, por eso solo se puede formar uno”.

Esfera

(T5) La V-BPa3-S3|2:29:48-2:29:50|: “Entonces hagamos los puntos ahora [menciona a BP1]”, V-BP1-S3|2:30:04-2:30:05|: “¿Cuál es el segundo lado?”. V-BP1-S3|2:30:35-2:30:51|: “Pero, puede ir acá, no, pero es que estamos pensando que el ángulo va en medio de los dos”, V-BPa3-S3|2:30:51-2:30:55|: “Pero si marcamos con la regla, sería mejor”. Hacen la construcción en la esfera, V-BP1-S3|2:31:22-2:31:41|: “Bueno, pero aquí está el de 60, pero tendríamos que hacer el otro caso, que el ángulo esté aquí [refiere a LLA o ALL], el ángulo puede estar acá”, V-BP1-S3|2:31:51-2:32:38|: “Es que el ángulo puede estar acá, pero el segmento este [BPa2: Siempre es fijo], no, ya, este ángulo ya no mediría 60 [refiere al ángulo entre los lados fijos], es la misma idea de esto, nosotros tenemos este ángulo en el plano y estamos poniéndolo en medio, sería esto mismo, entonces el tercer lado se ve condicionado, o puede haber otro, tiene que ser la geodésica que pase por los dos lados, si está en medio”, V-BP1-S3|2:32:40-2:34:56|: “Pero, como lo que hizo el lic. [refiriéndose al IP], es que podría estar así, si me entienden, o sea, por ejemplo, miren esto, aquí forma un triángulo, mire el ángulo dónde está, está en el segmento que no tengo, entonces, si yo pongo este aquí, marco ese segmento [BPa3: Es el segmento que dice que no está], aquí ya no hay 60 [el ángulo entre los lados fijos], entonces, si pongo el ángulo acá, este segmento también es único, o no, porque este no está condicionado o sí, [BPa3: Es que es lo mismo que tenía acá], dónde está el segmento 2, este es el más pequeño, pero si yo pongo este aquí, me entiende, si pongo este aquí y pongo el 60 ahora acá, se forma otro acá”.

(T6) V-BP1-S3|2:35:07-2:36:15|: “Pero parece que son perpendiculares ustedes [BPa3: Sí], será que estas van al polo, porque yo estoy manteniendo este segmento fijo y este también fijo, pero miren si yo lo pongo acá, se pueden formar infinitos triángulos. Miren, ahh no, [BPa2: Este hay que considerarlo también, porque está fijo

el de abajo], ahh es cierto, [BPa2: El de abajo también es fijo], es cierto, estoy formando este triángulo, este está fijo, pero este también, pero no llegan a formar acá, es cierto, solo es uno".

En la DG, V-BP1-S3|2:51:18-2:52:17|: "Bueno, en el plano nos dimos cuenta que podíamos colocar ese ángulo entre los dos lados o podríamos colocarlo y en el exterior del otro lado, pero de igual forma probamos que el tercer lado se veía condicionado; o sea, la longitud del tercer lado estaría condicionada por lo que solo se podría formar un triángulo, eso en el plano. De igual forma, en la esfera, los dos segmentos que formamos eran geodésicas y también corroboramos colocar el ángulo entre los dos segmentos y en la parte superior del otro segmento [refiere al extremo de uno de ellos], y también la tercera geodésica era única, entonces era única la otra, entonces solo se podía formar un triángulo".

Caso extra: Tres elementos fijos (LAA)

Plano

(T5) El IP les pregunta: "¿Con qué lado [de los dos que tienen] quieren quedarse, con el corto o el largo?", el V-BP1-S3|3:08:13-3:08:26|: "Pero no va a funcionar con este [IP: Deben seleccionar pensando en la composición del triángulo], el corto". V-BPa3-S3|3:08:35-3:08:38|: "El ángulo, lado, ángulo". (T6) Hacen la construcción que se presenta en la figura 106, V-BP1-S3|3:09:34-3:10:33|: "Igual, solo uno, porque si pongo este aquí [BPa3: Al contrario, póngalo ahí], miren, aquí tiene 30, pero no llega allá [APa2: No llega], pero puede acá, pero puede ser acá, hasta ahí, pero igual solo se forma uno [BPa2: Sí]". V-BP1-S3|3:10:36-3:10:56|: "¿Puede formar infinitos? Porque el ángulo este lo puedo mover acá, pero el segmento no llega acá, no va a llegar allá, entonces son condicionados los lados, o sea, este ángulo, uno, un triángulo".

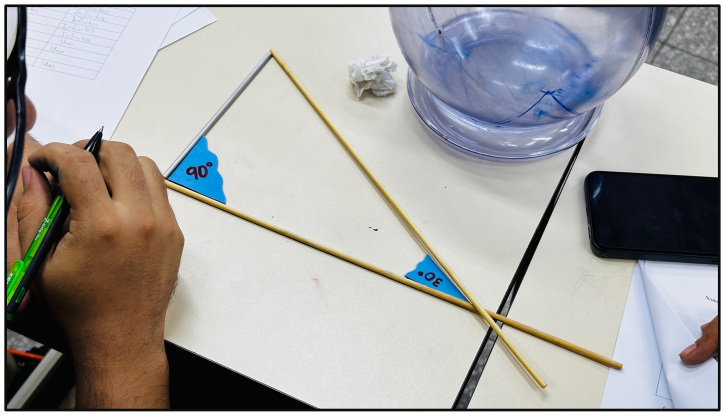


Figura 106. Construcción del equipo B para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.

V-BPa3-S3|3:11:04-3:11:06|: "Con esos lados, solo uno", el V-BP1-S3|3:11:06-3:11:08|: "Sí, solo es uno, solo uno se puede". El IP: "cuántos en el plano", V-BP1-S3|3:11:13-3:11:08|: "Uno. Intentamos hacer esto primero, entonces nos dimos cuenta de que solo se formaba uno, pero este lado que no sabemos cuánto es, entonces podríamos colocarlo acá, así, pero nos dábamos cuenta de eso, que podemos colocarlo acá, pero el tercer lado no va a formar el triángulo con este porque este es fijo, entonces solo puede estar moviendo el ángulo [sin cambiar la medida del ángulo, lo mueve por el lado no fijo], hasta que se encuentran [prueba colocar los elementos

de diferentes formas: AAL, ALA, LAA]", el IP les dice además que este ángulo es fijo [el tercer ángulo], V-BP1-S3|3:11:51-3:11:55|: "Sí, por la suma de los tres ángulos tiene que ser fija".

Esfera

(T5) Al entregarles el ángulo esférico extra, seleccionan uno de 150 grados, V-BP1-S3|3:08:37-3:08:45|: "Este, tal vez funciona, tal vez funciona", V-BPa2-S3|3:08:45-3:09:07|: "Y este [señala el otro ángulo esférico], [BP1: 60 era, pero se borró; refiere a la medida del segundo ángulo], y entonces cómo, pero y este, ¿150 y 50?, [BP1: Espérese, hay que ver]". V-BPa2-S3|3:12:06-3:12:13|: "¿Y en la esfera? Pero hay que mejor marcarlos, hay que volver a marcarlos". V-BPa3-S3|3:12:16-3:12:27|: "Y el otro cordón se los llevaron [BP1: Solo es un lado fijo], [BP2: Ahorita solo es un lado fijo, porque estamos LAA]". Hacen la construcción del segmento, V-BP1-S3|3:13:16-3:13:22|: "Espéreme que vamos a ver si funciona con ese ángulo que agarramos, porque yo lo agarré así al sopapo [significa que lo tomó al azar]", V-BP1-S3|3:13:31-3:13:53|: "Yo tengo este …, hay que extenderlo, extiéndalo, [BPa3: Pero con la regla o con el marcador], vamos a marcarlo medio y después le da con la cosa [BPa3: Pero aquí está la regla]".

(T6) V-BP1-S3|3:14:00-3:14:09|: "Este se puede extender, entonces, como se puede extender lo vamos a marcar todo", V-BP1-S3|3:14:21-3:16:16|: "Y ahora el de 150, sí se puede, 150 y 60, si lo pongo acá [BPa3: Ahh es cierto], pero igual es único, aquí se va a unir, pero y si lo pongo acá [prueban colocar el ángulo de 150 en las formas AAL (ver figura 107a) y ALA (ver figura 107b)], si lo pongo acá tendría que moverlo acá [BPa2: Cuál es la fija, esta de acá, verdad, no, pero si usted lo pone acá], no va a llegar, pero aquí si funciona, o no, ¿tampoco funciona, verdad?, no, porque tiene que llegar acá, [BPa3: No, no llega], pero si lo pongo aquí sí o no [mueve el ángulo en diferentes partes del segmento no fijo para verificar en que posición el tercer lado podría coincidir], sí, [BPa2: Acá sí, porque si usted extiende este y se choca], se choca, o sea deben estar contrarios, el lado debe ser el comprendido entre los dos ángulos, porque si lo pongo acá no funciona. Mire, aunque lo ponga bien pegadito [si acerca los dos ángulos (como en la figura 107a)], este, si lo extiende, no llega acá". V-BP1-S3|3:16:18-3:16:24|: "Entonces los ángulos tienen que estar en medio de los dos, para que se forme uno".

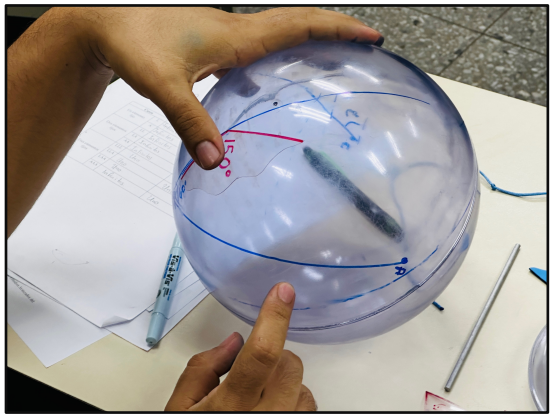


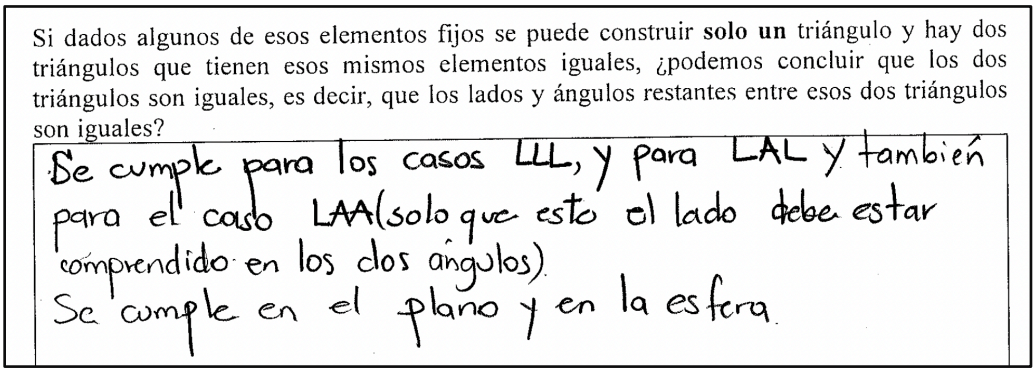
Figura 107a. Construcción del equipo B para el caso AAL.
Fuente: Fotografía-sesión 3.

Figura 107b. Construcción del equipo B para el caso ALA.
Fuente: Fotografía-sesión 3.

(T7) Después de dar la indicación y escuchar el comentario de AP3 que dice que sería como inducir a la semejanza, V-BPa2-S3|3:23:33-3:23:35|: “A la congruencia de triángulos”. El IP dibuja dos triángulos con medidas para hacer el ejemplo. En la DG, ante la pregunta, el V-BP1-S3|3:33:02-3:33:10|: “Se cumple, pero para ciertos casos [IP: ¿Para qué casos no se cumple?], para el caso del último AAA. A diferencia en cuanto al plano, hay infinitos triángulos y en la esfera uno nada más y, por lo que decía el compañero [menciona a CP2], que los ángulos, los tres ángulos se pueden mantener, pero los triángulos pueden hacerse más amplios [hace un triángulo con sus manos y lo amplía (ver figura 108)], como hacerle un zoom, pero ya no, o sea, teniendo solamente esos tres elementos, no implica que el otro triángulo va a ser igual”.

Figura 108. BP1 muestra la ampliación de un triángulo para el caso AAA. Fuente: Video-sesión 3.

En sus HT, el BP1 describe los casos en los que se cumple para el plano y para la esfera (ver figura 109). Todos los miembros del equipo presentan la misma tabla resumen; por ejemplo, la tabla de la BPa3 se muestra en la figura 110.



Si dados algunos de esos elementos fijos se puede construir **solo un** triángulo y hay dos triángulos que tienen esos mismos elementos iguales, ¿podemos concluir que los dos triángulos son iguales, es decir, que los lados y ángulos restantes entre esos dos triángulos son iguales?

Se cumple para los casos LLL, y para LAL y también para el caso LAA(solo que este el lado debe estar comprendido en los dos ángulos)
Se cumple en el plano y en la esfera.

Figura 109. Respuesta por BP1 de la T7. Fuente: HT.

Resumen de los casos

¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?

Casos		Plano	Esfera
Un elemento fijo	L	infinitos.	infinitas
	A	infinitos	infinitas
Dos elementos fijos	LL	infinitas	infinitas.
	LA	infinitas.	infinitas.
	AA	infinitas	Infinitas.
Tres elementos fijos	LLL	un triangulo	un triangulo.
	LLA	un triángulo.	un triangulo.
	LAA	un triangulo	un triángulo
	AAA	infinitas	un triangulo

Figura 110. Tabla resumen por BPa3. Fuente: HT.

Equipo C:

Al recordar los elementos geométricos que componen un triángulo, V-CPa1-S3|0:02:02-0:02:05|: "Tres lados, tres ángulos, tres vértices".

Caso 1: Un elemento fijo (seleccionaron: A)

Plano

(T1) El equipo C seleccionó un ángulo. Al preguntar sobre lo que podemos decir de los otros elementos dado el elemento que seleccionaron, un ángulo de 60 grados (ver figura 111), el V-CP2-S3|0:15:32-0:15:34|: "Que van a sumar 120", V-CPa1-S3|0:16:04-0:16:06|: "Todos van a ser igual a 60", el IP pregunta si alguno de los otros ángulos puede ser obtuso, el V-CP2-S3|0:16:18-0:16:21|: "No… oh sí, si en el caso fuera 120… No, si el otro mide 100 y el otro puede medir perfectamente 20", V-CPa3-S3|0:16:34-0:16:34|: "Para tener la suma de los 180". En sus HT, la CPa2 explicita algunos casos de los ángulos (ver figura 112).

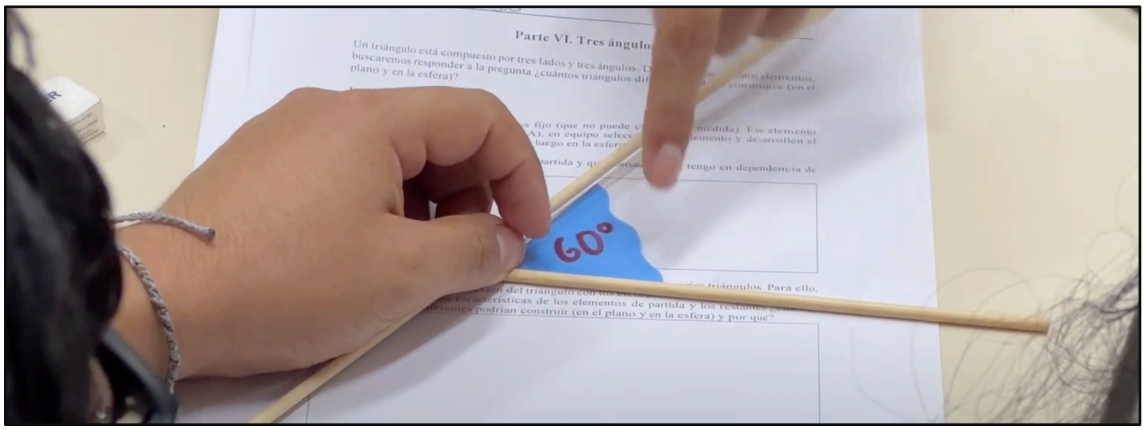


Figura 111. Construcción del equipo C para un ángulo fijo en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.

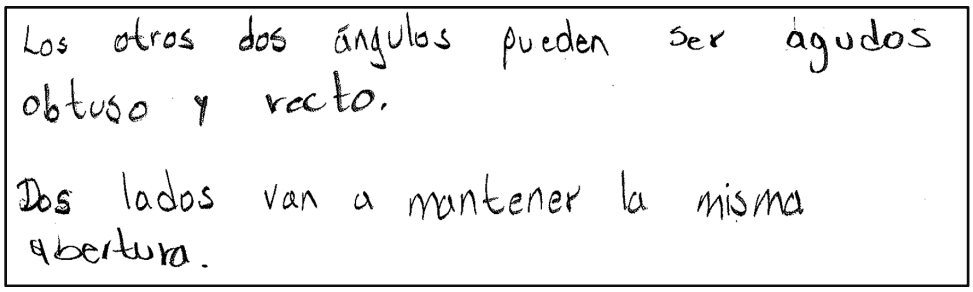


Figura 112. CPa2 presenta diferentes caso dado un ángulo fijo. Fuente: HT.

Al preguntar si podemos decir algo de los lados, el V-CP2-S3|0:16:56-0:17:22|: “En el caso de los lados, yo sé que uno de los casos, por ejemplo, podría ser el equilátero [construye la figura 113a], podría ser isósceles porque el equilátero es un caso particular del isósceles… entonces podríamos tener un triángulo isósceles o un triángulo escaleno [construye la figura 113b]”. El IP pregunta, solo teniendo el ángulo seleccionado, qué puedo decir de los lados que están contiguos. El V-CP2-S3|0:18:06-0:18:17|: “Sí, es que realmente no puedo decir nada de estos dos porque simplemente tengo un ángulo”. Se le pregunta si ese ángulo limita de cierta forma a esos lados. El V-CP2-S3|0:18:33-0:18:34|: “El punto de partida siempre sería 60 [CPa3: La abertura]”.

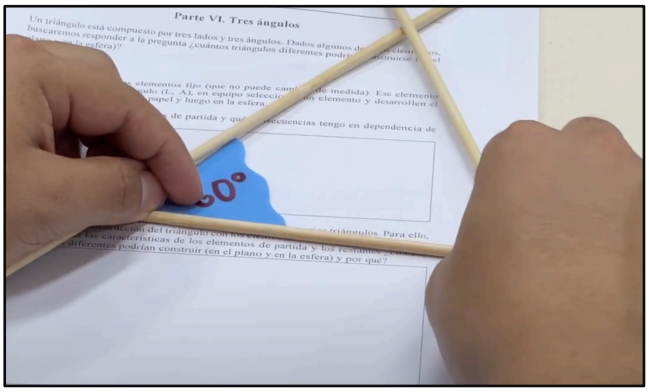


Figura 113a. El equipo C construye un triángulo equilátero. Fuente: Fotografía-sesión 3.

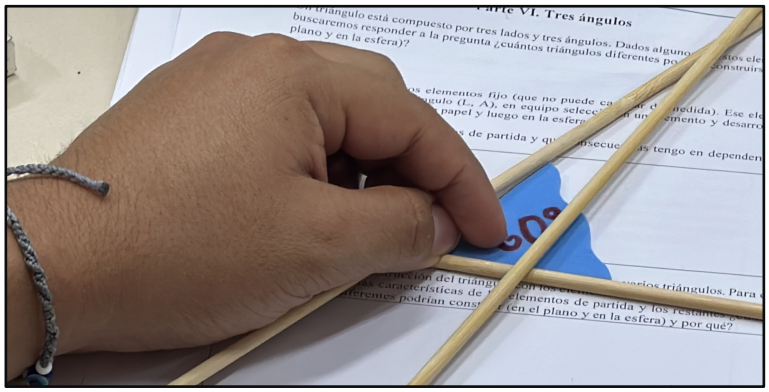


Figura 113b. El equipo C construye un triángulo escaleno. Fuente: Fotografía-sesión 3.

(T2) En la DE, para responder a la pregunta general en el plano, el V-CP2-S3|0:28:44-0:29:27|: “Solo a partir del ángulo, del ángulo son 120 [APa2: Sí, porque se van a ir moviendo]. En realidad, no serían 120, serían 119, porque el ángulo puede ir variando. Digamos, acá tengo 60; si yo lo muevo a 61, entonces va a ser 59, 62, 58, y va a ir así sucesivamente hasta llegar a 120, 119, sí, sí,119, y que el otro mida 1 grado [está variando los otros dos ángulos de forma entera]”, V-CPa3-S3|0:29:29-0:29:49|: “Ah, es cierto”.

El IP, pregunta: “Cuántos tenemos diferentes”, el V-CP2-S3|0:29:38-0:29:27|: “119 [IP:¿Solo 119?], claro nosotros considerando solamente un ángulo, pero si consideramos la distancia de los lados, infinitos”, V-CPa3-S3|0:30:04-0:30:09|: “Por qué habían cambiado de opinión si cuando iniciamos esta [refiere a CPa1] dijo que eran infinitos”, el V-CP2-S3|0:30:09-0:30:43|: “Porque consideramos, estábamos diciendo que solo consideráramos un elemento, si consideramos solo el ángulo y no la distancia de los lados son 119, [CPa3: Por qué], si usted tiene 60, en otro también tiene 60, [CPa1: No, ella está diciendo por qué podrían ser infinitos], porque podrían ser

infinitos, porque los lados pueden tener diferentes distancias, van a estar en diferentes ángulos, y si los lados, en el plano como las rectas se expanden [modificación de una generalización euclidiana], yo podría escoger infinitas posiciones", el V-CP2-S3|0:30:49-0:32:05|: "Veamos esto en el plano, son tres rectas, … entonces, yo, por ejemplo, podría tomar estos 60 y después podría cortarlo de esta forma. Este es uno, todo esto; luego puedo ponerlo en 62, 63, 64, 65, 90; y 90 pueden ser todos estos, entonces podrían ser infinitos… En el plano son infinitos considerando lados y ángulos; en el plano, considerando solo ángulo, 119, no 120, si serían 120". La CPa3 cuestiona que el porqué serían 120, el V-CP2-S3|0:32:29-0:33:00|: "Primero 60, 60, 60; luego 59, 60; y así sucesivamente; el básico es de 60, 120; de 60, 119, 1; 118; así hasta 1, 119". En sus HT, la CPa3 fue la única que dejó explícitamente esta cantidad de triángulo según la variación del ángulo (ver figura 114).

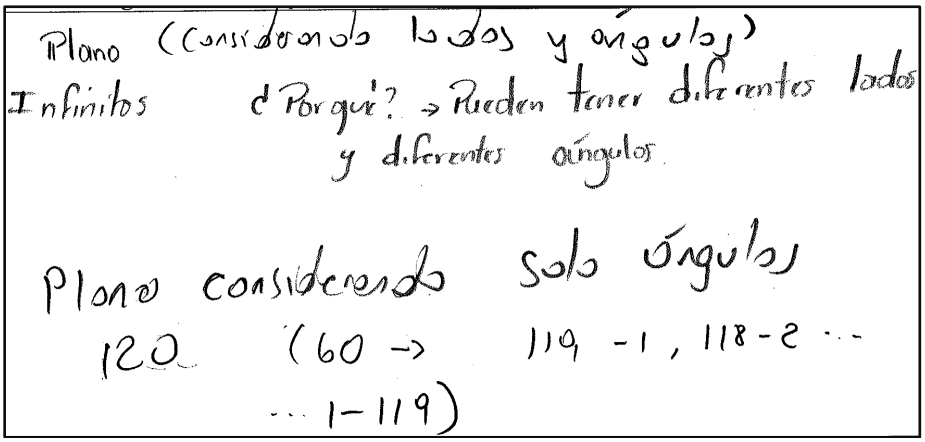


Figura 114. CPa3 explicita una cantidad de triángulos según la variación de los ángulos. Fuente: HT.

En la DG, después de la opinión de BP1 y AP3, el V-CP2-S3|0:36:10-0:36:45|: "Que si nosotros consideramos solamente el ángulo, podríamos tener infinitos triángulos en el plano, porque como es independientemente del ángulo, si ya nosotros solo estamos considerando el ángulo como algo que va a estar variando sin considerar los lados, 120 podrían formarse, pero si ya consideramos que la distancia de los lados podría variar, serían infinitos". El IP dice: "120, contando ángulos como unidades enteras, y si pensamos en la idea del AP3", el V-CP2-S3|0:36:51-0:36:52|: "Es cierto, serían infinitos".

Esfera

En la esfera, el equipo C seleccionó un ángulo recto; como los lados pueden cambiar de medida, los representaron con cuerdas tensas (ver figura 115). (T1) El IP pregunta si se puede decir algo de los otros elementos conociendo el ángulo de partida, el V-CP2-S3|1:02:44-0:03:51|: "Los ángulos van a ser iguales [CPa3: Eso le iba a decir][IP: Cómo así], o sea, no iguales, pero independientemente de la figura que yo tenga está condicionada de que los ángulos que se están formando con la otra, con la tercera recta, es decir, estos dos de acá van a ser iguales independientemente de la longitud de la recta, si yo extiendo esta, esos ángulos van a seguir siendo los mismos [está intentando verificar que si muevo la tercera recta, como si fuera paralela a la posición inicial los dos ángulos que falta van a seguir siendo iguales como en el plano], préstenos otro [pide otro ángulo], otro ángulo de 90", el

IP le dice que no puede darle uno más en ese momento, esta solicitud también la registra el investigador-observador en sus notas (ver figura 116).

Figura 115. Construcción del equipo C para un ángulo fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.

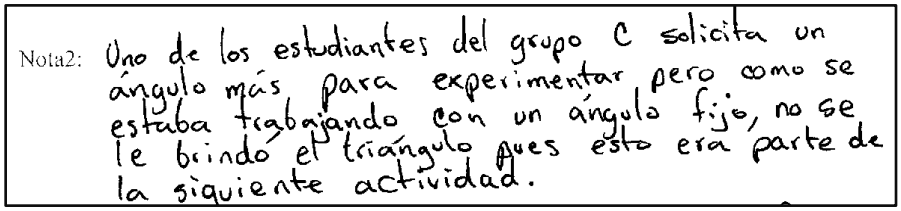

Nota2: Uno de los estudiantes del grupo C solicita un ángulo más para experimentar pero como se estaba trabajando con un ángulo fijo, no se le brindó el triángulo pues esto era parte de la siguiente actividad.

Figura 116. Nota de investigador-observador sobre la solicitud de otro ángulo. Fuente: NIO.

El V-CP2-S3|1:04:06-0:04:24|: "Pero van a ser mayores, van a ser mayores que 90 [refiere a los ángulos restantes], mientras que en el caso del triángulo solo pueden tener un ángulo de 90. Aquí los otros dos; sabemos que la suma de los ángulos [CPa1: Aquí la suma de los ángulos internos de un triángulo no van a ser 180] va a ser mayor que 180". El IP pide más ejemplos de triángulos y les pregunta si sus ángulos internos suman más de 180 grados; el equipo está de acuerdo en que sí, suman más de 180 grados.

V-CPa1-S3|1:06:15-1:06:22|: "Los ángulos del triángulo en la esfera no van a tener la misma medida", V-CPa1-S3|1:06:45-1:06:56|: "Yo diría eso, en el triángulo los ángulos no van a sumar la misma medida, en el plano tienen que medir 180, pero acá no", V-CP2-S3|1:07:30-0:07:54|: "Como lo explico, la suma va a ser mayor que 180, sí, porque si ustedes se fijan aquí tenemos 90, se supone que solo debería de haber un ángulo de 90, pero aquí tenemos uno mayor de 90 [tiene un ángulo de 90 grado y un otro obtuso y aun así forman un triángulo en la esfera], y acá tenemos [refiere al tercer ángulo], ya con eso es mayor que 90, ya tenemos que la suma de los ángulos va a ser mayor que 180", en sus HT, la CPa3 explicita esta proposición (ver figura 117). V-CPa1-S3|1:08:40-1:08:54|: "Pero la pregunta aquí es si esta cuerda tiene que estar tensa [CPa3: Obviamente, tiene que estar tensa], la tercera cuerda", esto también lo describe el investigador-observador (ver figura 118).

La suma de los ángulos internos son mayores que 180°

Figura 117. CPa3 reconoce que los ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados. Fuente: HT.

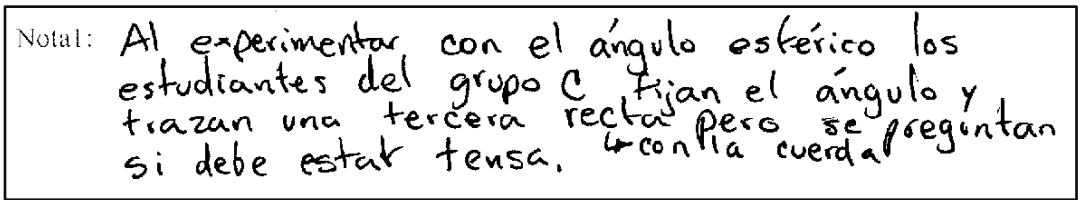


Figura 118. Nota de investigador-observador sobre la construcción de los lados con cuerdas tensa. Fuente: NIO.

(T2) En la DG, después de la participación del equipo A y B, la V-CPa1-S3|1:12:50-1:12:51|: "Igual, infinitos", el IP pregunta: "Por qué", V-CP2-S3|1:12:54-1:13:31|: "Porque como nosotros solamente tenemos un ángulo, igual como mencionaba [menciona el nombre de BP1], nosotros también observamos que, por ejemplo, la medida de todos los ángulos internos va a medir más de 180, entonces, al no limitarme a mí la medida de los ángulos internos ni tampoco la distancia, entonces, si consideramos que, por ejemplo, la medida de, considerando decimales, entonces los que se forman a partir de toda figura van a ser infinitos, puedo tener infinita cantidad".

Caso 2: Dos elementos fijos (Seleccionaron: AA)

Plano

(T3) En la DE, el IP les pregunta, dado esos dos ángulos fijos, qué podemos decir de los otros elementos, V-CP2-S3|1:51:18-1:51:37|: "Que se va a formar un triángulo escaleno, únicamente un triángulo escaleno; el otro va a sumar 30, obligatoriamente va a medir 30 [IP: Qué tipo de triángulo se va a formar], puede ser un triángulo que sea 30, 60, 90". En sus HT, todo el equipo especifica esta idea, por ejemplo, en la figura 119 se muestra la respuesta del CP2. El IP pregunta si, dados esos dos ángulos, se puede decir algo de los lados, V-CP2-S3|1:51:49-1:51:51|: "Que van a ser todos diferentes".

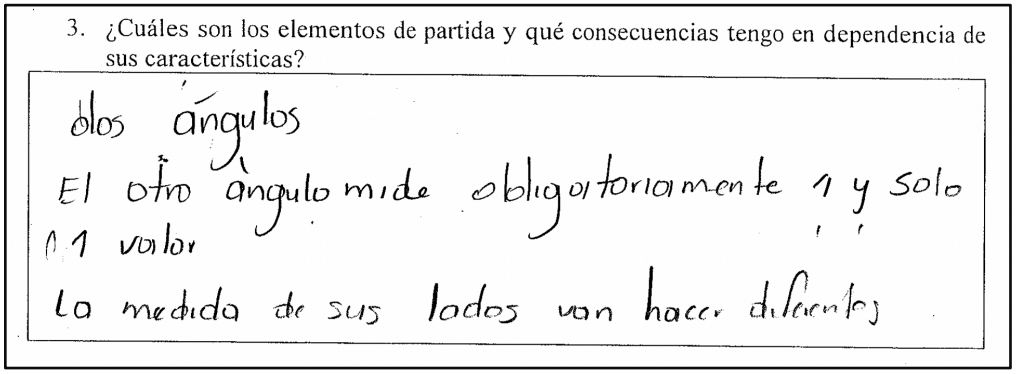


Figura 119. Respuesta por CP2 de la T3. Fuente: HT.

(T4) El IP: "¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir?", la V-CPa1-S3|1:52:00-1:52:04|: "Infinitos, por los lados". V-CPa1-S3|1:52:25-1:52:28|: "Con dos lados [CPa1: Dados dos lados], ve dos ángulos", V-CPa3-S3|1:52:32-1:52:37|: "¿Por qué, por qué [menciona el nombre de CP2]?". CPa3 lee la T3, V-CPa1-S3|1:52:47-1:52:55|: "Aquí dos ángulos, el otro ángulo mide 30", V-CP2-S3|1:52:57-1:53:21|: "Obligatoriamente una medida, el otro ángulo mide obligatoriamente una medida [CPa3: Una medida obviamente], el otro ángulo mide obligatoriamente uno y solo un valor, porque acá se forma uno de 90, 60, 30; como los dos ángulos, el otro

obligatoriamente va a tener esa medida", V-CPa1-S3|1:53:43-1:53:28|: "Y de los lados [menciona a CP2]", V-CP2-S3|1:53:58-1:54:04|: "Infinitos, va a ser un triángulo escaleno siempre, las medidas de sus lados van a ser diferentes siempre", V-CP2-S3|1:54:12-1:54:20|: "En el caso de que todos sean diferentes va a ser un triángulo escaleno, pero si dos son iguales siempre va a ser un triángulo isósceles", V-CPa1-S3|1:54:47-1:54:50|: "En el plano son infinitos, por qué, ¿por qué son infinitos en el plano?", V-CP2-S3|1:54:49-1:54:50|: "Por los lados", V-CPa1-S3|1:54:54-1:54:50|: "Porque los lados se cambian de medida".

Esfera

(T4) Hacen la construcción en la esfera (ver figura 120). V-CPa1-S3|1:57:34-1:57:41|: "Se formarán infinitos, igual por los lados [CP2: Sí, por la medida], por la medida de sus lados", V-CPa1-S3|1:58:08-1:58:11|: "Es que cuando está acá [menciona a CP2] no me va a tensar", V-CP2-S3|1:58:57-1:59:19|: "Van a medir más de 180 [CPa3: Obviamente], [CPa1: Ya lo habíamos dicho], no, porque habíamos dicho un triángulo de 90 [CPa1: Ajá, poner tres ángulos de 90], por lo menos ya sabemos que no van a haber triángulos equiláteros, isósceles sí puede haber [CPa1: Pero serían infinitos], ajá". El IP: "¿A qué conclusión llegaron?", la V-CPa3-S3|1:59:38-1:59:39|: "Infinitos también". V-CP2-S3|1:59:46-1:59:56|: "No puede haber triángulos equiángulos [CPa3: ¿Por qué?], o será que sí, porque tendría que ser una medida muy específica [CPa3: Usted sale con unas ideas]". V-CPa3-S3|2:01:22-2:01:25|: "Ahora nos van a dar tres puntos fijos", V-CPa1-S3|2:01:28-2:01:31|: "¿Qué pedimos, un lado u otro ángulo?", V-CPa3-S3|2:01:31-2:01:33|: "Obviamente otro ángulo y van a ser infinitos siempre". Dada la solicitud que hicieron en el caso anterior de un ángulo recto y al seleccionar el segundo ángulo también recto, el investigador-observador, menciona que están tratando de probar la existencia de un triángulo trirectángulo (ver figura 121).

Figura 120. Construcción del equipo C para el caso AA. Fuente: Fotografía-sesión 3.

Nota3: Los estudiantes con dos ángulos esféricos intentaron probar la idea generada en la actividad con un ángulo fijo. Al parecer quieren probar si puede haber un triángulo esférico con tres ángulos rectos.

Figura 121. Nota de investigador-observador sobre la construcción del triángulo trirectángulo. Fuente: NIO.

En la DG, V-CP2-S3|2:01:50-2:02:08|: “Infinitos, porque como los segmentos pueden ir variando, entonces eso me da dar siempre infinitos triángulos, independientemente de los dos ángulos fijos y de igual forma en el plano”. El IP pregunta si se puede deducir la medida del tercer ángulo, V-CP2-S3|2:02:11-2:02:08|: “En el plano, sí; y en el caso de la esfera, no”.

Caso 3: Tres elementos fijos (seleccionaron AAA)

Plano

(T5) La V-CPa3-S3|2:36:36-2:36:39|: “Entonces, ¿qué podemos decir de los ángulos?”. V-CPa1-S3|2:36:41-2:36:31|: “Tres ángulos, tomamos los tres ángulos en el plano, no se puede decir nada, solo de los lados, [CPa3: Sí]”. V-CP2-S3|2:36:53-2:36:56|: “De los lados podemos decir que va a ser un triángulo escaleno”. V-CPa1-S3|2:37:40-2:37:42|: “Y cuántos vamos a tener en el plano, [CPa3: Infinitos], por los lados”, el V-CP2-S3|2:36:53-2:36:56|: “Por los lados, por lo que hablábamos ayer, a diferencia de por los lados que siempre va a ser el mismo [refiere a si tuviera fijos los lados]”. El IP pregunta: “¿Qué ángulo seleccionaron al final?”, V-CPa1-S3|2:40:10-2:40:17|: “El de 30, [IP: Por qué], [CP2: Porque era la obligación formar un triángulo]”. Colocan los ángulos formando uno de 180 grados (ver figura 122).

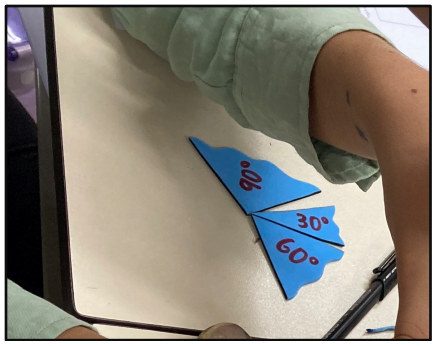
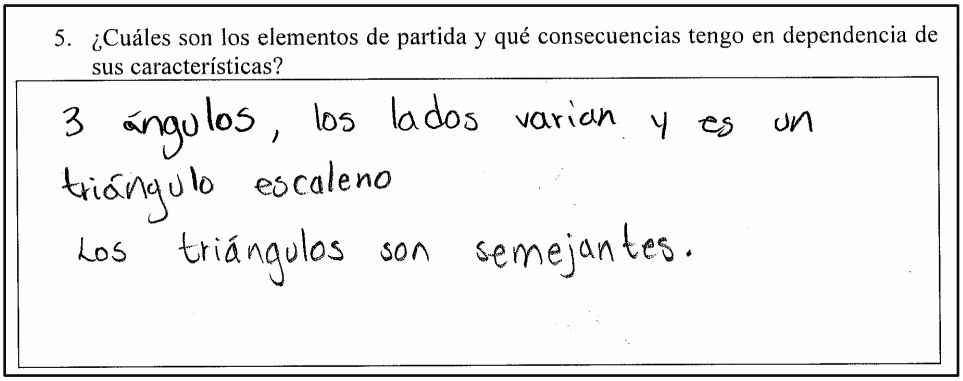


Figura 122. Justificación del equipo C para la selección de ángulos planos. Fuente: Fotografía-sesión 3.

(T6) El IP: “¿En el plano, cuántos diferentes?”, el V-CP2-S3|2:42:10-2:42:11|: “Infinitos, es que no se puede formar uno con los ángulos fijos”. En sus HT, la CPa1 presenta las características de los triángulos formados y menciona que serán semejantes (ver figura 123).


5. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características?

3 ángulos, los lados varían y es un triángulo escaleno

Los triángulos son semejantes.

Figura 123. Respuesta por CPa1 de la T5. Fuente: HT.

(T5 y T6) Seleccionaron tres ángulos rectos, buscando la construcción de un triángulo trirectángulo (ver figura 124). IP: “Tienen tres ángulos iguales, ¿cuántos triángulos diferentes pueden construir?”, el V-CP2-S3|2:40:39-2:40:40|: “Uno”. V-CP2-S3|2:41:00-2:41:40|: “Pero podríamos decir que los ángulos tienen que ser un triángulo isósceles en una circunferencia, el tercero”. El IP recomienda usar la regla como una recta esférica y colocar dos ángulos y luego usar las dos cuerdas para los otros dos lados. Después de hacer la construcción (ver figura 125), V-CP2-S3|2:43:00-2:43:28|: “Ohhh, uno, infinitos, iguales, pero con todas las medidas de 90, [CPa1: Solo hay que mover los lados], sí, solo hay que mover los lados [intentan mover los lados y mantener los ángulos como el plano]”.

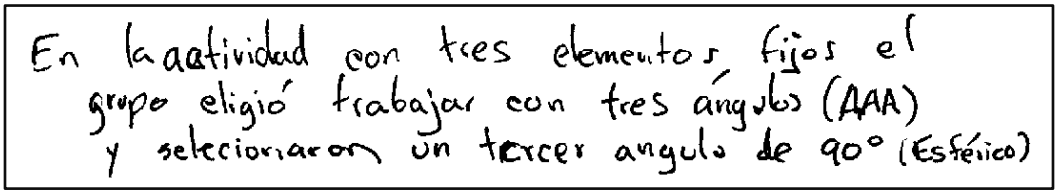


Figura 124. Nota de investigador-observador sobre la selección de tres ángulos rectos. Fuente: NIO.

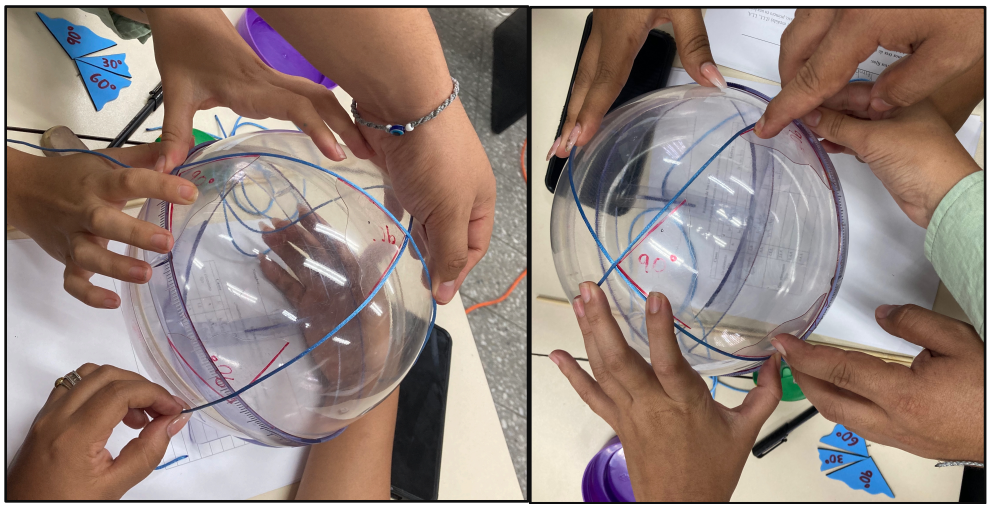


Figura 125. Construcción del equipo C para el caso AAA. Fuente: Fotografía-sesión 3.

V-CPa1-S3|2:43:31-2:43:17|: “Pero moviendo los lados se van a mover los ángulos, [CP2: No, porque si yo los voy deslizando]”, el V-CP2-S3|2:43:37-2:43:41|: “Ah, pero mira, la otra cambia, la fija cambia, un triángulo”. V-CP2-S3|2:43:46-2:44:02|: “Tenemos esto acá, si mueve, por ejemplo, si yo muevo, va cambiando este [en la figura 126 se ve como forma un triángulo con dos ángulos rectos, pero el tercero se hace obtuso]”. El IP: “Este ángulo de acá sigue midiendo 90 grados”, la V-CPa3-S3|2:44:09-2:44:15|: “No [CP2: No, cambia], [CPa1: Entonces solo sería uno]”, V-CP2-S3|2:44:19-2:44:21|: “Entonces sería un triángulo equiángulo”.

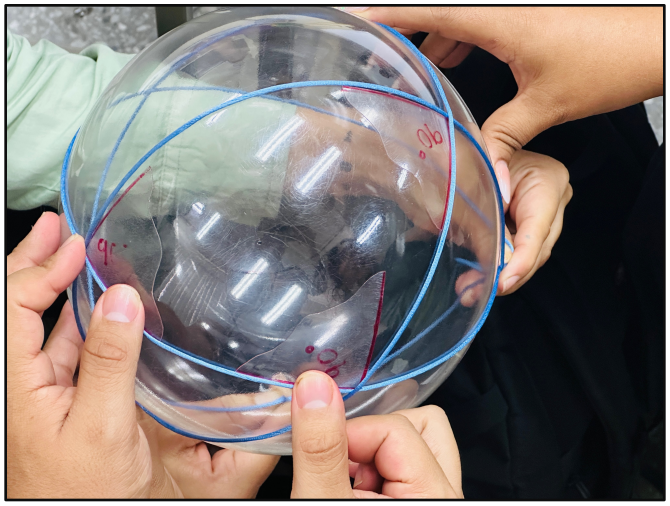


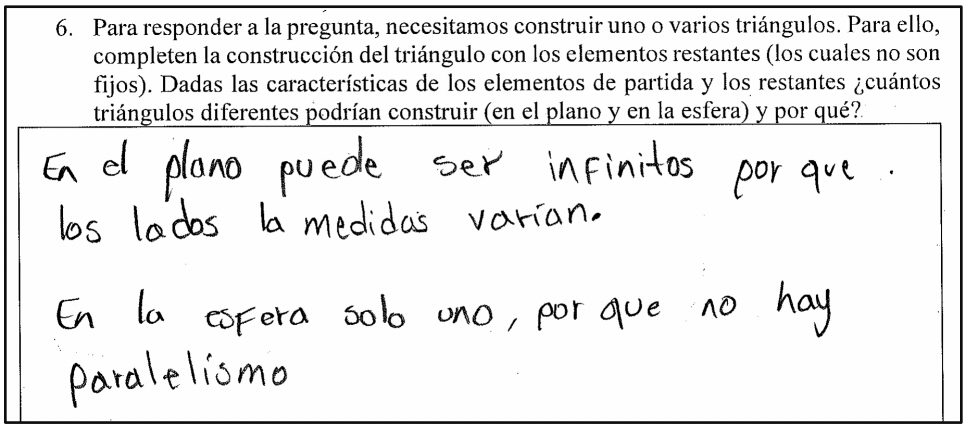
Figura 126. Deducción del triángulo único dado tres ángulos fijos en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.

La V-CPa3-S3|2:44:37-2:44:40|: "Nosotros tenemos condicionados los tres", V-CPa3-S3|2:45:15-2:45:19|: "Con esos tres ángulos, solo se forma uno [CP2: Ajá, uno]", V-CP2-S3|2:45:21-2:45:44|: "Sí, porque si usted se fija, esto cambia. Mueva este para acá, ahí, y ahí sí se formaría uno nada más y volvería a tener, que sería desde el polo a la circunferencia, a la circunferencia mayor", V-CP2-S3|2:45:56-2:46:00|: "Si usted se fija, tenemos un diámetro; este va a llegar hasta el polo prácticamente", el IP: "¿Por qué llega al polo?", V-CP2-S3|2:46:14-2:46:45|: "Supongamos que llega al polo, [IP: ¿por qué?], [CPa1: Porque es en ángulo recto], …, ajá. Entonces solo formaría uno".

En la DG, el IP pregunta primero por el plano, V-CP2-S3|2:49:20-2:49:42|: "Infinitos, [IP: En el plano dicen que si tienen tres ángulos hay infinitos triángulos, por qué], porque lo que va a producir es que todos los triángulos, ciertamente van a tener la misma medida los ángulos, pero eso no determina cómo van a ser los lados; los lados pueden seguir cambiando. La medida del ángulo es independientemente de la longitud de los segmentos". El IP: "¿Cómo serían esos triángulos infinitos?, ¿tienen alguna característica particular o no?", el V-CP2-S3|2:49:46-2:49:53|: "Eh, solamente la que van a ser escalenos, todas las medidas de sus lados van a ser diferentes", IP: "Tendrán alguna característica que relacione todos esos triángulos", CP2 toma los palillos y, manteniendo un ángulo con sus dos lados, mueve el tercer lado manteniendo los otros dos ángulos (ver figura 127). Entonces, APa1 menciona que son triángulos semejantes, el V-CP2-S3|2:50:15-2:50:16|: "Ah, sí". El IP pregunta de qué relación podemos deducir esos triángulos y APa1 menciona que de las paralelas. El IP pregunta qué pasó en la esfera, V-CP2-S3|2:50:49-2:50:53|: "En la esfera, luego solo se forma uno".

Figura 127. CP2 muestra infinitos triángulos semejantes que mantienen sus ángulos en el plano. Fuente: Video-sesión 3.

En sus HT, la CPa1 describe que la diferencia del plano y la esfera, en este caso, es consecuencia del paralelismo, ya que reconoce que en la esfera no hay paralelismo (ver figura 128).



6. Para responder a la pregunta, necesitamos construir uno o varios triángulos. Para ello, completen la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos de partida y los restantes ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué?

En el plano puede ser infinitos por que los lados la medidas varían.

En la esfera solo uno, por que no hay paralelismo

Figura 128. Respuesta por CPa1 de la T6. Fuente: HT.

Caso extra: Tres elementos fijos (LAA)

Plano

(T5) V-CPa1-S3|3:16:35-3:16:36|: "Dos ángulos y un lado", V-CPa1-S3|3:16:55-3:16:59|: "Estos van a ser los fijos, estos tres", V-CPa1-S3|3:17:03-3:17:13|: "Pero estos pueden variar… [APa3: Ok, no, porque no estaría en 90]", V-CP2-S3|3:17:22-3:17:27|: "Hágalos así, [CPa1: El que, este], sí, fíjese si sigue de 90". Hicieron la construcción que aparece en la figura 129.

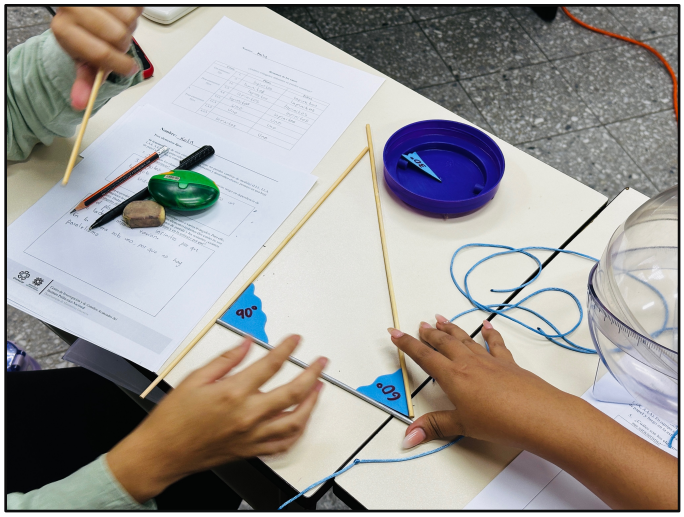


Figura 129. Construcción del equipo C para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.

Esfera

(T5 y T6) V-CPa1-S3|3:19:31-3:19:44|: "Hay que trazarlo con esta [CPa3: Maje no], sí, con este podemos [el IP sugiere usar la cuerda y hacer línea punteada]". Trazaron la línea usando la cuerda tensa, V-CP2-S3|3:20:40-3:21:09|: "Agarre la punta [CPa1: Ya la tengo], estírelo [toman dos cuerdas grandes y colocan en los lados no fijos (ver figura 130)], [CPa3: Ya tengo las dos puntas], ajá, ¿puede variar? No se deforma, entonces, uno". V-CP2-S3|3:21:12-3:21:23|: "Pero aquí es de 90 otra vez [se pregunta por la medida del tercer ángulo], [CPa3: No sé, confírmelo], tendría que, matemática".

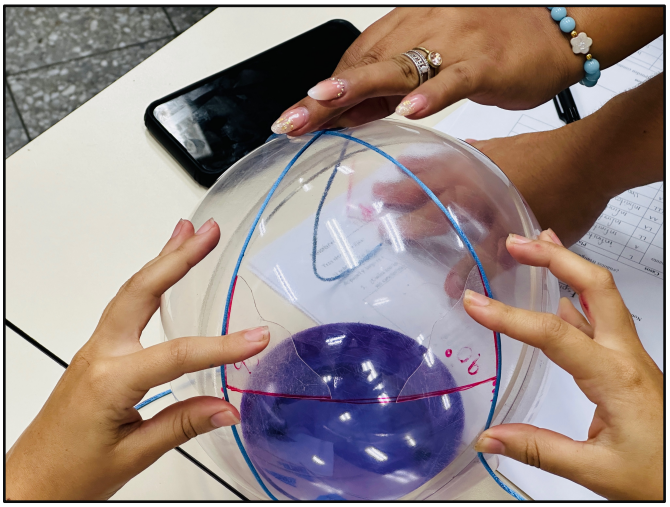


Figura 130. Construcción del equipo c para el caso LAA en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.

(T7) Después de dar la indicación, y escuchar el comentario de AP3 que dice que sería como inducir a la semejanza, y que el IP dibuja dos triángulos con medidas para plantear la pregunta para un caso en particular, V-CP2-S3|3:24:53-3:24:54|: "Congruencia". En sus HT, el CP2 menciona que sí para los casos [refiere a los casos en que solo se podía construir un único triángulo], tanto en el plano como en la esfera, pero hace el diagrama para el caso ALA (ver figura 131). En cambio, CPa1 justifica que sí, porque los elementos fijos condicionan a los otros.

Además, presenta un diagrama de dos triángulos que comparten ángulos, pero no lados, consecuencia del paralelismo que mencionó en las preguntas anteriores (ver figura 132).

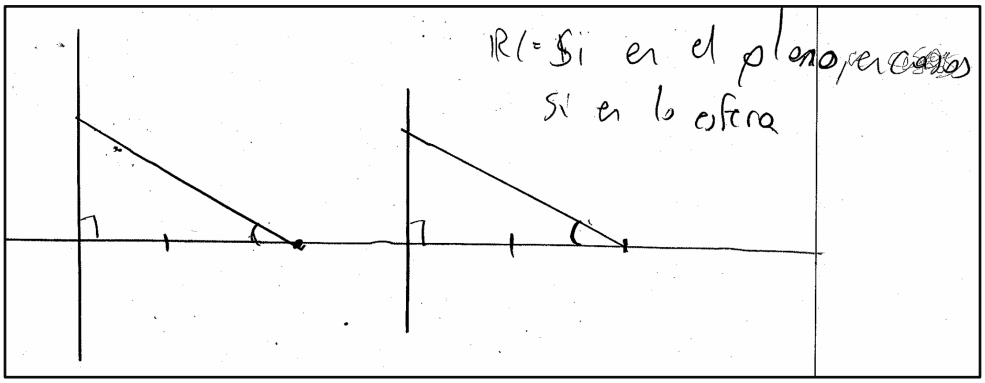


Figura 131. Respuesta por CP2 de la T7. Fuente: HT.

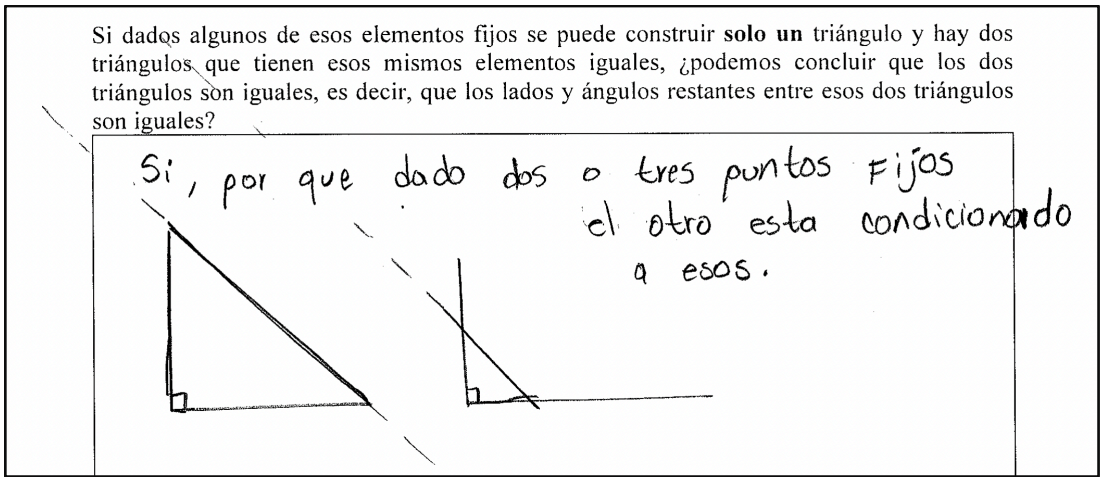


Figura 132. Respuesta por CPa1 de la T7. Fuente: HT.

En la DG, después de la presentación del equipo B, el V-CP2-S3|3:34:16-3:34:54|: "Igual que [menciona a BP1], en el plano vimos lo de los ángulos, pero en la esfera sí [IP: En la esfera vieron los cuatro casos], sí". Todos los miembros del equipo presentan la misma tabla resumen; por ejemplo, en la figura 133, se muestra la tabla de CPa3.

Resumen de los casos

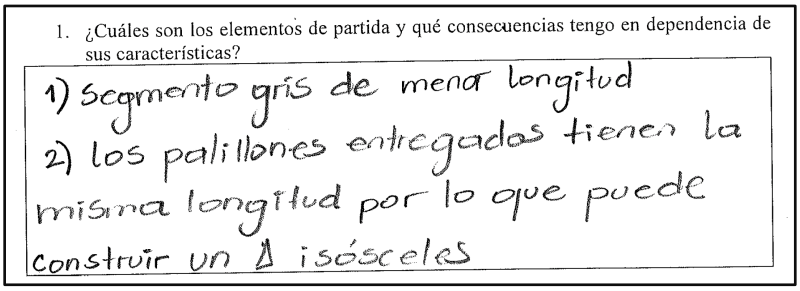
¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?

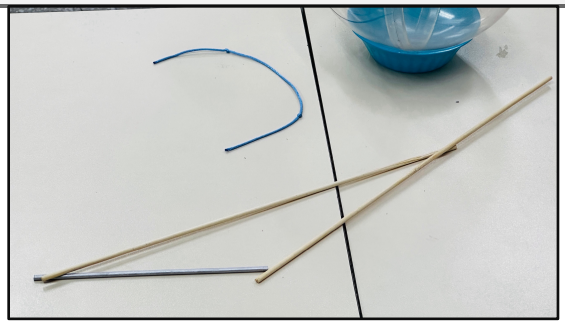
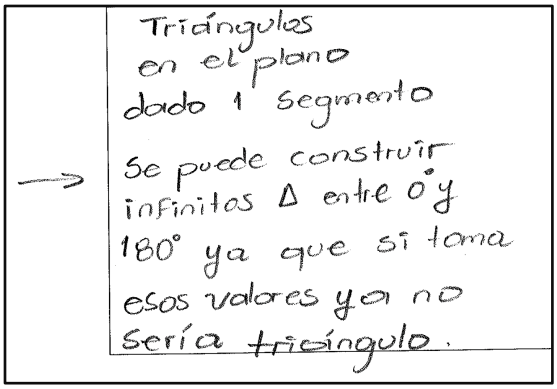
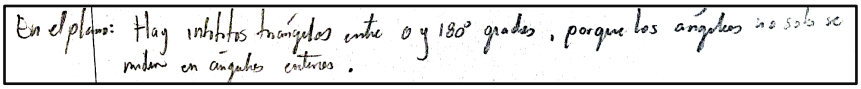
Casos		Plano	Esfera
Un elemento fijo	L	infinitos	infinitos
	A	infinitos	infinitos
Dos elementos fijos	LL	infinitos	infinitos
	LA	infinitos	infinitos
	AA	infinitos	infinitos
Tres elementos fijos	LLL	Uno	Uno
	LLA	Uno	Uno
	LAA	Uno	Uno
	AAA	infinitos	Uno

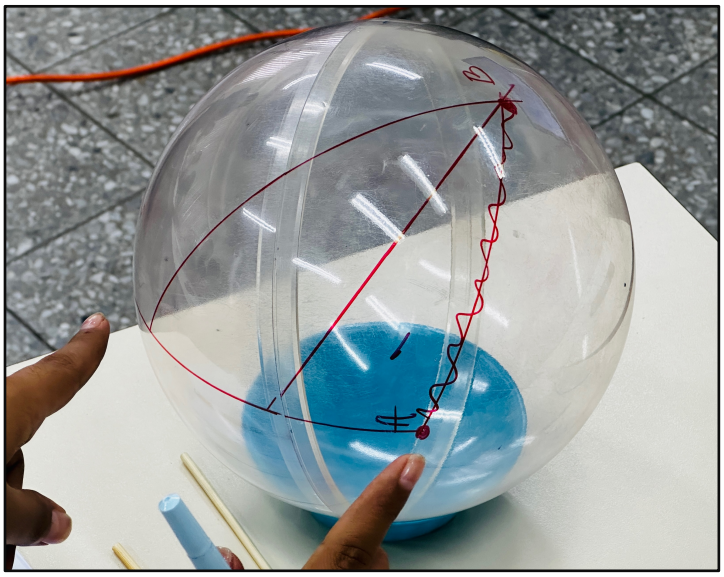
Figura 133. Tabla resumen por CPa3. Fuente: HT.

6-1 Análisis de prácticas (acciones y actividades): parte VI

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Equipo A: **Caso 1: Un elemento fijo (seleccionaron: L)** **Plano** El equipo A seleccionó un segmento. El IP pregunta si, teniendo un segmento, uno de los ángulos que estaría en uno de sus extremos puede ser de 90 grados (ver figura 70), todos indican que sí, luego pregunta si puede ser de 180 grados y algunos indican que sí, el V-AP3-S3|0:07:54-0:07:54|: "Sí". El IP pregunta si están seguros, el V-AP3-S3|0:08:00-0:08:00|: "Ah, no". Se preguntó si puede ser obtuso, mencionan que sí; entonces el IP pregunta si ese fuera obtuso, cómo sería el ángulo del otro extremo del segmento, el V-AP3-S3|0:08:16-0:08:16|: "Sería agudo". El IP pregunta si el primero es agudo, cómo puede ser otro ángulo del otro extremo del segmento, el V-AP3-S3|0:08:26-0:08:26|: "Obtuso". El IP dice: "Solo obtuso"; aceptan que puede ser agudo, obtuso o recto. Figura 70. El IP muestra cómo podrían ser los ángulos de los extremos de un lado. Fuente: Video-sesión 3.	**Seleccionan** un segmento. **Exponen** ese segmento como elemento de partida. **Exponen** que si el ángulo de un extremo es obtuso el ángulo del otro extremo puede ser recto o agudo. **Exponen** que si el ángulo de uno de los extremos es agudo el ángulo del otro extremo puede ser agudo, recto u obtuso. **Exponen** que ninguno de los ángulos de los extremos puede ser llano.	Dado que en el primer caso solo pueden tener un elemento fijo, seleccionan un segmento. Luego reflexionan sobre las posibilidades de los ángulos ubicados en los extremos de ese segmento.
(T1) En la DE, el V-AP3-S3|0:08:55-0:09:02|: "Un isósceles, son del mismo tamaño", V-APa1-S3|0:09:07-0:09:29|: "Pero tienen que calzar, ¿verdad?, pero ambos tienen la misma medida [refiere a los dos palillos que no son fijos; esto se muestra en sus HT al hacerlo explícito en la T1 (ver figura 71)], se puede colocar la misma medida, ¿sí, verdad?, se puede construir un ángulo recto", el V-AP3-S3|0:09:33-0:09:34|: "No, sí, pero nos sobra más aquí, ahí", V-APa1-S3|0:09:36-0:09:46|: "Tiene que quedar calzadito, por ejemplo, aquí es isósceles y queda calzadito [el AP3: Sí, ese sí], yo digo que sí". Al IP, el V-AP3-S3|0:09:56-0:09:58|: "Solo que no sé si se pueden sobreponer", el IP, les recuerda que los otros dos segmentos no son fijos al igual que los tres ángulos, que solo hay un segmento que debe mantener la misma medida, el segmento fijo, además, presenta algunos casos en los que los segmentos que no son fijos se sobreponen, el V-AP3-S3|0:11:07-0:11:34|: "Bueno, pero, si lo mueve aquí y lo mueve para este lado,	**Construyen** un triángulo isósceles. **Juntan los vértices de** los palillos del segmento fijo y los no fijos. **Notan** que los palillos no fijos miden lo mimo.	Considerando que los palillos no fijos (los que no están pintados) son fijos, unen sus extremos y forman un triángulo isósceles. Reconociendo que los palillo no fijos se

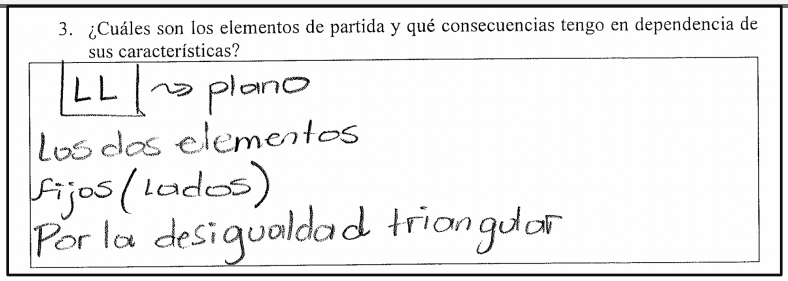
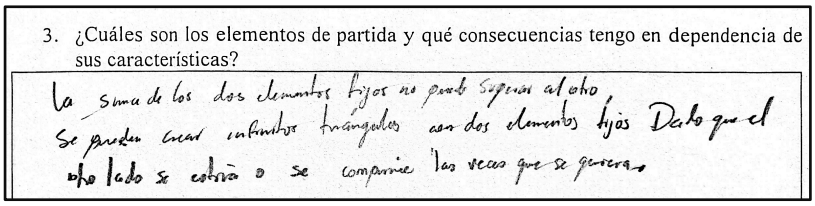
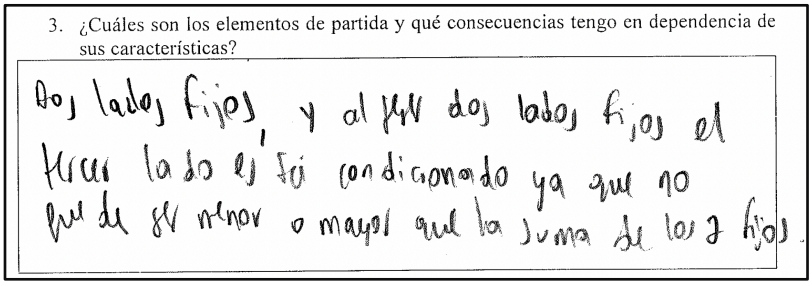
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
los ángulos, ambos estos ángulos puede ser agudos u obtusos y este si va a ser agudo siempre, el de arriba, el de arriba no siempre sería agudo, pero si lo mueve, si esto lo mueve para este lado, este sería el obtuso y este sería el agudo y este de aquí siempre sería agudo, este de aquí arriba".  1. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características? 1) Segmento gris de menor longitud 2) los palillones entregados tienen la misma longitud por lo que puede construir un Δ isósceles Figura 71. Respuesta de la T1 por APa1. Fuente: HT.	Sobreponen los palillos no fijos. **Abren y cierran la abertura** de los ángulos formando diferentes triángulos. **Prolongan** y **acortan** la medida de los segmentos no fijos. **Deducen** (erróneamente) que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo.	puede sobreponer, cambian la medida de los ángulos y de los dos lados no fijos. Al modificar los ángulos de los extremos del segmento fijo, dado que solo presentan casos en los que el ángulo opuesto al segmento fijo es agudo, concluyen, erróneamente, que siempre será agudo.
(T2) En la DE, para responder a la pregunta general para el plano, el V-AP3-S3|0:21:12-0:21:34|: "Pero lo que me pregunto es, hay infinitos obtusos, hay solo un recto, hay infinitos obtusos, hay infinitos agudos, porque usted puede formar un ángulo 6.1, 6.2, 6.3, 6.35 [su construcción se puede ver en la figura 72]", V-APa1-S3|0:21:31-0:21:32|: "Y contarlos como no", V-APa2-S3|0:21:35-0:21:36|: "Clasificarlos sí", V-APa1-S3|0:21:38-0:21:39|: "El que no se podría formar es el equilátero", V-AP3-S3|0:21:42-0:21:45|: "Sí se puede, sí porque se pueden sobreponer", V-APa1-S3|0:22:00-0:22:02|: "Cuántos podríamos hacer", V-AP3-S3|0:22:04-0:22:31|: "Buena pregunta, no sé si serían infinitos, ese no puede ser igual a 180 y este no puede ser igual a cero [APa1: Todos los triángulos que estén entre], 0 y 180 [APa1: Que no incluye ni a cero y ni a 180][esto APa1 lo hace explícito en sus HT (ver figura 73)], entonces serían, eso es lo que no sé si serían infinitos", V-AP3-S3|0:22:34-0:23:04|: "Tengo una consulta [le pregunta al IP], no sé si serían, o sea según la deducción creo que son infinitos triángulos porque lo que pensaba yo es, eh si uno de los lados está por ejemplo a 15.3 grados entonces usted puede 15.35, 15.36 y ya es otro, ya va aumentando, entonces, entre 0 y 180 habría infinitos triángulos que se podrían formar, pero siento que me pide un número específico, pero no sé". El IP le dice que no necesariamente se pide un número específico, dado que los ángulos pueden cambiar de medida. Estos no necesariamente cambiarán de medida en unidades enteras; también pueden cambiar en decimales. El IP: "¿Este ángulo puede variar?, ¿hasta dónde puede variar?", V-AP3-S3|0:23:21-0:23:53|: "Hasta antes de 180… claro, infinitos".	**Muestran** infinitos triángulos obtusos y agudos. **Deducen** (erróneamente) que solo se forma un triángulo rectángulo. Reconocen que la abertura de los ángulos puede estar en grados enteros y decimales. **Exponen** que no pueden contar los diferentes triángulos que se pueden formar. **Clasifican** los triángulos formados en agudos, rectos y obtusos. **Sobreponen** palillos para construir un triángulo equilátero. **Reconocen** que ningún ángulo puede medir 180 ni cero, porque no se formaría un triángulo. **Deducen** que pueden construir	Cambiando la medida de los ángulos, no solo en unidades enteras, construyen infinitos triángulos. Además, concluyen que no se forma un triángulo cuando uno de los ángulo mide cero grados o 180, por lo que describen que los ángulos pueden variar entre cero y 180 grados. Al modificar solo los ángulos construyen el caso de un triángulo rectángulo y concluyen que es único.

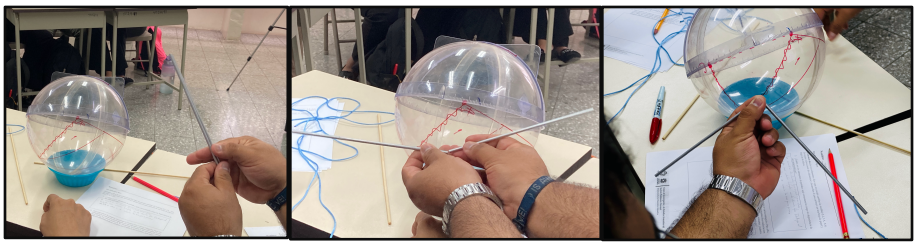
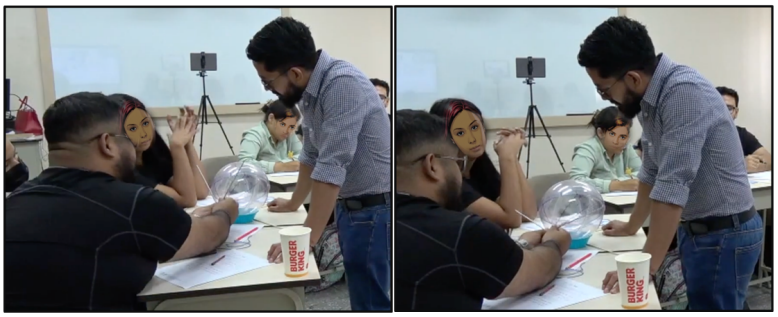
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 72. Construcción del equipo A al primer caso en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 1.	infinitos triángulos.	
 Figura 73. APa1 describe los casos en los que no se construye un triángulo. Fuente: HT.		
En la DG, después de la respuesta de BP1, se preguntó al equipo A si habían llegado a esa misma conclusión, V-AP3-S3|0:35:25-0:35:53|: "Sí, solo que igual con los ángulos, que al buscar los ángulos de 180, puedes mover esos dos lados, en función a, por ejemplo, 15.3, y ese 15.3 a 15.35, 36, 37; entonces vendría siendo, podría formar infinitos triángulos entre 0 y 180". La APa2 explicita en sus HT que la medida de los ángulos también podría ser en decimales (ver figura 74).  Figura 74. APa2 reconoce que los ángulo no solo se pueden medir con enteros. Fuente: HT.	**Modifican** los ángulos en decimales. **Deducen** que pueden construir infinitos triángulos. **Reconocen** que ningún ángulo puede medir 180 ni cero, porque no se formaría un triángulo.	Cambiando los ángulos en grados enteros y decimales, concluyen que pueden construir infinitos triángulos.
Esfera		
Al pasar al trabajo en la esfera, el IP hace la aclaración de que los lados de un triángulo son geodésicas, indicando que en el plano no se necesitaba esa aclaración porque en el plano todos los segmentos de recta son geodésicas. (T2) En la DE, la V-APa2-S3|0:49:04-0:49:17|: "Ahí tenemos uno, podemos hacer otro más arriba, …, podemos tener todos los que se quiera, hay infinitos también", V-APa1-S3|0:50:05-0:50:12|: "¿Los biángulos van de un vértice al otro opuesto, verdad? [le pregunta al AP3]", V-AP3-S3|0:50:13-0:50:37|: "Eh, dependiendo del tamaño, es decir, son infinitos", V-APa2-S3|0:50:18-0:50:23|: "Son infinitos, si trazo esta aquí se van	**Admiten** que los lados de un triángulos esférico son geodésicas. **Trazan** y **marcan** el segmento esférico fijo. **Nombran** sus extremos como punto A y B. **Construyen** un segmento	De la aclaración del PI, reconocen que los lados de los triángulos deben ser geodésicas. Representan en la esfera el segmento fijo y construyen una relación que les permita construir infinitos triángulos, trazan un segmento

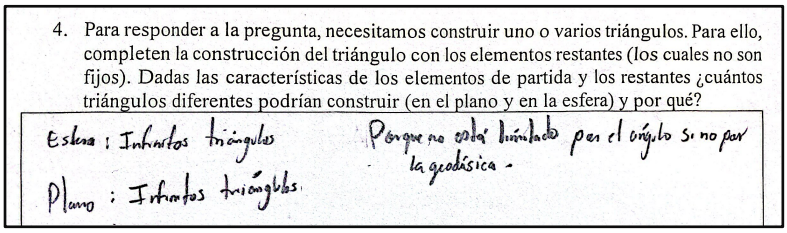
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
uniendo con este punto y van haciendo triángulos infinitos [AP3: Ajá, sí, correcto; en su representación muestra dos casos (ver figura 75)]", V-APa1-S3|0:50:25-0:50:27|: "Pero son triángulos esos [AP3: Sí]". V-AP3-S3|0:50:34-0:50:36|: "Es que está en función a una perpendicular, esos triángulos", la V-APa2-S3|0:50:39-0:50:43|: "Están en función a esta [señala el segmento consecutivo al ángulo A de su representación], van a ser infinitos", V-APa2-S3|0:50:44-0:50:47|: "Y ahí puede tener la posibilidad de triángulos que usted quiera".  Figura 75. Construcción del equipo A para un lado fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-Sesión 3.	perpendicular al segmento fijo en el punto A. **Fijan** el ángulo recto en A. **Prolongan y acortan** la medida de los lados no fijos. **Trazan** dos segmentos desde el punto B al segmento perpendicular del segmento fijo. **Construyen** dos casos de triángulo que mantienen fijos ese segmento. **Deducen** que, si fijando el ángulo A se construyen infinitos triángulos cambiando su medida también habrá infinitos y no necesitan probarlo. **Deducen** que pueden construir infinitos triángulos.	(prolongable) perpendicular al segmento fijo en el punto A. Y construyendo algunos casos de triángulos rectángulos unen el punto B con el segmento perpendicular, deduciendo que pueden construir infinitos triángulos.
V-APa1-S3|0:51:16-0:51:25|: "Entonces este es fijo y a partir de ese se forman", V-APa1-S3|0:51:42-0:51:47|: "Aquí hay uno de 90 [preguntaba por la medida del segmento fijo]", V-AP3-S3|0:51:50-0:51:56|: "No, esa sería la circunferencia máxima en función al cual está haciendo los triángulos", V-APa1-S3|0:52:00-0:52:02|: "Ah, entonces si tomamos la circunferencia máxima", V-AP3-S3|0:52:02-0:52:11|: "Sí, esa es la máxima, en función a cómo está haciendo esos triángulos y el punto B vendría siendo el polo, en función a dónde está haciendo los triángulos". El IP pregunta cuál es el segmento, V-APa1-S3|0:52:20-0:52:21|: "Ese que está señalado [el segmento AB de la figura anterior]", al preguntar cuántos tenemos, V-APa1-S3|0:52:29-0:52:29|: "Infinitos", V-AP3-S3|0:52:33-0:52:53|: "Porque esos triángulos los está formando en función a la circunferencia máxima y en este caso todos van a terminar en lo que sería el B que sería uno de los polos, en este caso, entonces, si lo hacemos en función a esa máxima con B, ahí usted podría crear infinitos triángulos", V-AP3-S3|0:53:07-0:53:20|: "Igual yo pensaba en el caso más trivial que sería usando cualquiera de los dos polos y hacer triángulos rectángulos, si yo hago ese caso trivial van a salir infinitos triángulos rectángulos", el IP pregunta: "Cuál sería el ángulo recto", V-AP3-S3|0:53:24-0:53:48|:	**Fijan** un ángulo recto en A. **Trazan** una circunferencia máxima perpendicular al segmento fijo en A. **Establecen y condicionan** el caso en el que el segmento fijo mide un cuarto de circunferencia máxima y el punto B sería el polo de la perpendicular al segmento fijo. **Trazan** segmentos desde el punto B a la circunferencia perpendicular al segmento fijo.	**Estableciendo** el caso en el que el segmento fijo mide ¼ de circunferencia máxima, trazando una perpendicular al segmento fijo en A construyen infinitos triángulos desde el punto B a la perpendicular. A pesar de que en esas condiciones se están construyendo triángulo isósceles bi-rectángulos no reconocen los dos ángulos rectos, indicando que los otros dos ángulos deben suman 90 grados, para que los ángulos internos de los triángulos

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
"En que iría en función a la circunferencia máxima [segmento que interseca al segmento fijo en A, está indicando que todas las interseccionesen ese segmento son perpendiculares]… si usted lo empieza a trazar va a tener infinitos rectos, porque los está haciendo todos en función a la circunferencia máxima", el IP pregunta y estos [señala los otros dos ángulos] cuánto van a sumar si este es recto, V-APa1-S3|0:53:57-0:53:58|: "90 tienen que sumar[generalización euclidiana][AP3: 90]". En la DG, al preguntar cuántos triángulos diferentes se pueden construir en la esfera dado un segmento fijo, la V-APa1-S3|1:10:33-1:10:34|: "Infinitos", el V-AP3-S3|1:10:35-1:11:48|: "Infinitos también, igual al momento en el que yo hago los triángulos en función a la circunferencia máxima; si yo muevo los ángulos, de manera perpendicular se forman infinitos triángulos". Después de la participación de BP1, donde menciona que descubrieron que los ángulos internos de los triángulos esféricos suman más de 180 grados, el IP le pregunta a APa1 sobre lo que piensa de eso [porque la APa1 había dicho que debían sumar 180 grados, igual que el plano]. La V-APa1-S3|1:12:35-1:12:36|: "Escuchándolo veo que no".	**Exponen** que con ese caso puede construir infinitos triángulos rectángulos. **Deducen** (erróneamente) que los otros dos ángulos van a sumar 90 grados. **Trasladan** el ángulo recto en la circunferencia perpendicular al segmento fijo. **Deducen** que se pueden construir infinitos. **Reconocen** que los ángulos internos suman más de 180 grados.	sumen 180 grados. Esa deducción la cambian al escuchar la conclusión del equipo B, de que en la esfera los ángulos internos de un triángulo van a sumar más de 180 grados. Bajo las condiciones que ellos crearon concluyen que se pueden construir infinitos triángulos por ello, deducen que en las condiciones iniciales ocurre lo mismo.
Caso 2: Dos elementos fijos (seleccionaron: LL) **Plano**		
(T3) En la DE, el V-AP3-S3|1:28:19-1:28:46|: "Ahí, ese ángulo no importa [APa2: Se puede abrir más], sí [refiere a que el ángulo entre los dos segmentos no es fijo], el rollo es, aquí, no, perdón, estos son los que no importan, los dos, este es el que importa [refiere al ángulo entre los dos lados fijos], porque no puede llegar a ser 180. Ahí usted lo puede estirar todo lo que pueda, pero si se hace 180, ya pierde el sentido del triángulo". La V-APa1-S3|1:28:51-1:29:11|: "Pero estos dos grises son los fijos o qué". V-AP3-S3|1:28:56-1:28:46|: "Al tener dos lados fijos, son del mismo tamaño [menciona que los dos lados fijos seleccionados son del mismo tamaño]. Se fijó o no [APa2: No], ¿son del mismo tamaño? [APa2: No]". (T4) V-AP3-S3|1:29:46-1:30:19|: "También se pueden formar infinitos, pero que el ángulo superior, o el ángulo formado por los dos segmentos, sí, el ángulo formado por los dos segmentos fijos tiene que estar, no puede ser menor que 180, no puede ser mayor o igual que 180 sería, tiene que ser a fuerza menor que 180", APa1-S3|1:30:21-1:30:28|: "Puede ser infinitos porque, porque bueno estos se unen, este cambia, este no, este no", V-AP3-S3|1:30:28-1:30:59|: "Solo que no sé, al ser esos dos lados fijos si no los puede cortar [APa2: No lo puede cortar], no se puede sobreponer, este si lo puede estirar cuanto usted quiera, pero como le digo entre estos dos se vaya haciendo el ángulo más grande va a llegar un punto en que va a tender a esto, va a ser así y ahí ya no sería triángulo, entonces se puede poner de tal manera que este ángulo formado por esos dos fijos no sea 180".	**Seleccionan** dos segmentos. **Establecen** que el ángulo entre los dos lados fijos puede cambiar de medida. **Modifican** la abertura del ángulo entre los lados fijos. **Condicionan** el ángulo entre lo lados fijos (puede cambiar de medida, pero debe ser menor que 180 grados). **Deconstruyen** el triángulo haciendo el ángulo entre los lados fijo igual a 180 grados. **Prolongan y acortan** el tercer lado. **Señalan** los elementos que cambian y los que no. **Reconocen** que los lados fijos no	Tomando los dos segmentos fijos, modifican la abertura entre los dos segmentos fijos, notan que el tercer lado también cambia y que para que el triángulo mantenga su forma el ángulo entre los dos lados fijos no puede ser igual a 180 grados. Describiendo que con los palillo (lados fijos), no se pueden cortar ni sobreponer, sus extremos deben coincidir con los otros lados.

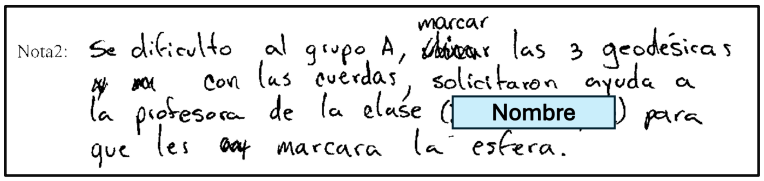
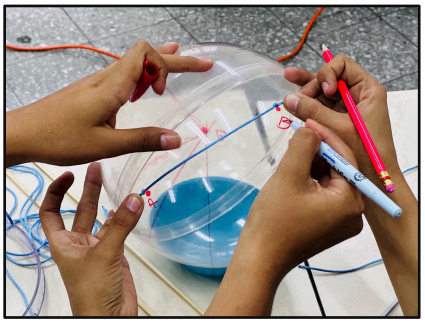
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
(T3) El IP les pregunta: "Dado esos dos elementos fijos, ¿qué se puede decir de los otros elementos?", AP3-S3|1:31:15-1:31:17|: "Sí, esa apertura no puede ser 180, tiene que ser menor que 180". Al preguntar por los otros ángulos, AP3-S3|1:31:27-1:31:54|: "Igual, estos no pueden ser menores que 180 porque al ser 180 se perdería la composición del triángulo. Como estos solo tienen este lado móvil, este sí lo puede estirar lo que usted quiera, pero a medida que este ángulo que vaya aperturando más va a ir tendiendo a ser 180, entonces dejaría de ser un triángulo. Ahí todavía, mientras no sea 180, se puede hacer un triángulo".	se puede sobreponer. **Juntan** los lados fijos por sus extremos. **Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos. **Modifican** la abertura del ángulo entre los lados fijos. **Condicionan** el ángulo entre lo lados fijos (puede cambiar de medida, pero debe ser menor que 180 grados). **Mantienen** la forma triangular condicionando el ángulo entre los lados fijos. **Prolongan y acortan** el tercer lado del triángulo.	Exponiendo que la abertura entre los lados fijos puede cambiar siempre que sea menor que 180 grados. Además, reconociendo que, al cambiar el ángulo entre los lados fijos, el tercer lado del triángulo también cambia.
El IP pregunta: "¿Puedo decir algo de este lado en dependencia de estos dos [los dos fijos]?", APa1-S3|1:32:13-1:30:28|: "Si lo pone así, ahí son 180, digamos, tendría que abarcar de vértice a vértice [refiere a la suma de los dos fijos (ver figura 76)], como la misma, que la suma de estas dos tendría que ser [refiere a la desigualdad triangular, la cual menciona explícitamente en sus HT (ver figura 77)]". El IP pregunta si puede ser mayor, APa1-S3|1:32:39-1:32:40|: "No", AP3-S3|1:32:40-1:32:50|: "No sí, mayor puede ser esta [el IP aclara que se puede prolongar, pero siempre formando un triángulo], ahh no", AP3-S3|1:32:55-1:32:56|: "Está condicionado a esos dos". El IP: "Cuántos triángulos se pueden formar", AP3-S3|1:33:22-1:33:23|: "Infinitos también". Figura 76. APa1 muestra la desigualdad triangular en el plano. Fuente: Video-sesión 3.	**Construyen** un ángulo interno entre los lados fijos de 180 grados. **Establecen** que el tercer lado no puede ser mayor que la suma de los dos fijos. **Prolongan** el tercer lado. **Condicionan** la prolongación del tercer lado del triángulo. **Mantienen** la forma triangular condicionando el tercer lado. **Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos.	Reflexionando sobre la medida del tercer lado del triángulo, explicitan que este puede prolongarse siempre y cuando sea menor que la suma de los dos segmentos fijos. Por lo que deducen que tanto los ángulos como el tercer lado pueden cambiar, pero también están condicionados por la desigualdad triangular.

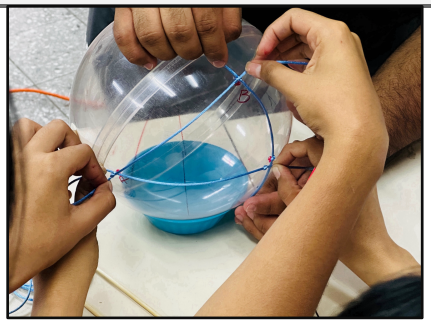
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 77. Respuesta por APa1 de la T3. Fuente: HT. En sus HT, la APa2 describe la desigualdad triangular y justifica la infinitud de los triángulos por el cambio, extenderse o comprimirse, del lado restante (ver figura 78). Esto también lo presenta el AP3 (ver figura 79). El IP: "Cuántos triángulos se pueden formar", AP3-S3|1:33:22-1:33:23|: "Infinitos también".	**Justifican** la condición del tercer lado y de los ángulos a través de la desigualdad triangular.	
 Figura 78. Respuesta por APa2 de la T3. Fuente: HT.	**Suman** los dos segmentos fijos. **Comparan** la suma de los dos elementos fijos con la medida del tercer lado. **Establecen** que la suma de los dos elementos fijos debe ser mayor que el tercer lado.	
 Figura 79. Respuesta por AP3 de la T3. Fuente: HT.		
Esfera		
(T4) Construyen y señalan los lados fijos. AP3-S3|1:34:09-1:34:12|: "El lado fijo era ese, uno; ahorita voy a poner este otro", AP3-S3|1:34:56-1:35:05|: "Solo que ese sería el móvil, ese es fijo [APa1: Estos dos son los dos fijos], ajá", AP3-S3|1:35:17-1:35:25|: "Digamos, póngale, tiene estos dos fijos, si los empieza a mover, a abrir, siempre se podría hacer infinitos", V-APa2-S3|1:35:31-1:35:51|: "Este, si tengo la misma abertura [refiere a que el ángulo entre los dos fijos puede variar igual que el plano], entonces este va a tener la misma distancia, entonces este podría ser este", AP3-S3|1:35:53-1:36:23|: "Sí, lo que yo pienso es que como es fijo este, entonces si estos dos son fijos y los empieza a abrir, este se va a ir moviendo acá, acá y acá; y va a ir haciendo más grande el triángulo [APa1: Pero esos no se pueden mover], no, esos si se pueden abrir así como acá [refiere al plano], es como que tenga estos dos acá así [en el plano], y los empiece a abrir, pero este si lo puede abrir más de 180 y se va a formar un triángulo, no hay problema [AP3 toma los palillos y hace el ejemplo (ver figura 80)]".	**Trazan** los segmentos fijos en la esfera. **Nombran** sus vértices A, B y C. **Trasladan** la misma estrategia del plano a la esfera. **Modifican** la abertura (abriendo y cerrando los lados) del ángulo entre los lados fijos. **Trazan** algunos ejemplos de triángulos.	Trazando los lados fijos en la esfera y nombrando los vértices. Abriendo el ángulo entre los lados fijos muestran que con solo cambiar la medida de ese ángulo se pueden construir infinitos triángulos. Notan que a pesar de que el ángulo se abre hasta 180 o más de 180, la forma del triángulo se mantiene, por

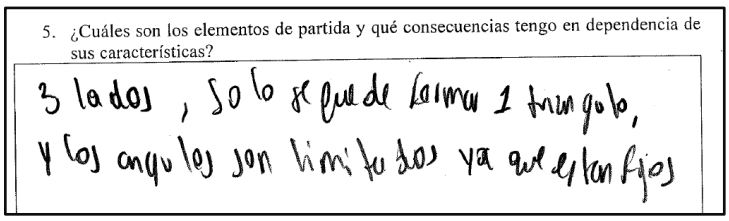
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 80. AP3 ejemplifica el cambio en la medida de un ángulo. Fuente: Fotografía-sesión 3. APa1-S3|1:36:37-1:36:43|: "Pero aquí sería el menor segmento que se forme [AP3: La geodésica siempre], tendría que ser la geodésica", el AP3-S3|1:36:46-1:36:47|: "¿Influye ahí la geodésica también?". El IP les recuerda que los lados de los triángulos son geodésicas, AP3-S3|1:36:55-1:37:00|: "O sea, si tengo un triángulo en el que uno de los lados no sea geodésica, ¿no es triángulo?, [IP: No]", el IP recuerda que en el plano no se requiere esa especificación porque todo segmento es geodésica, AP3-S3|1:37:26-1:37:46|: "Sí, pero digamos, así como lo tenemos acá, estos dos aquí así, entonces si yo los empiezo a abrir y sigo pasando, me va a formar este otro acá, en toda la circunferencia [toma los palillos y ejemplifica (ver figura 81)], entonces, este de acá no sería un triángulo [IP: En la esfera no (ver figura 82)], solo este de acá que sería la geodésica [señala el otro triángulo, IP: Sí]", el IP señala que entre dos vértices debe estar la distancia más corta entre ellos.  Figura 81. AP3 ejemplifica la abertura de un ángulo. Fuente: Video-sesión 3. 	**Retoman** la estrategia del plano, es decir, **regresan** al plano, para evidenciar el cambio del ángulo. **Establecen** (erróneamente) que el ángulo entre los lados fijos puede ser mayor que 180 grados. **Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos. **Exponen** que en la esfera los lados de un triángulo deben ser geodésicas. **Admiten** que existen regiones formadas por tres segmentos de recta que no son triángulos. **Identifican** las geodésicas que se forman entre los tres vértices. **Reconocen** que los lados del triángulo deben ser geodésicas. **Muestran** con segmentos planos los triángulos que pueden forman dados dos elementos fijos. **Regresan** al trabajo con segmentos planos para argumentar la construcción.	ello, aceptan (erróneamente, porque solo el de 180 es triángulo) que siempre se construyen triángulos. Esta estrategia la utilizaron en el plano, por lo que para argumentar el proceso regresan al plano. Identificando las geodésicas que se forman entre los puntos A, B y C. notan que, aunque se forman figuras de tres lados no son triángulos porque el segmento entre dos de sus puntos no es una geodésica. Retomando la estrategia utilizada en el plano para argumentar sus conclusiones.

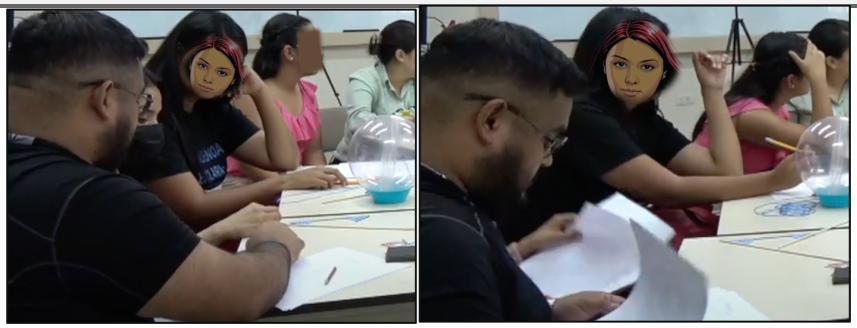
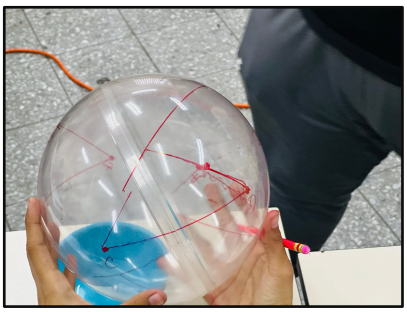
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Figura 82. AP3 muestra una figura de tres lados rectos que no sería un triángulo en la esfera. Fuente: Fotografía y video-sesión 3. (T4) AP3-S3|1:37:56-1:38:24|: "Siempre habría infinitos, pero podría jugar en eso porque tendría de esta forma y como de esta forma también. Igual, si solo deja uno y empieza a mover el otro también, siempre sería uno de los dos, siempre habría infinitos de igual manera, pero habría..., el ángulo ya no está limitado a 180, como en el plano, la composición del triángulo, lo que está limitado es a la geodésica, en este caso". Esta justificación la retoma la APa2 en sus HT, para justificar que hay infinitos triángulos en el plano y en la esfera (ver figura 83).	**Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos. **Exponen** que con solo cambiar uno de los elementos se muestran infinitos triángulos. **Reconocen** que tanto en el plano como en la esfera los triángulos están condicionados, por la composición del triángulo y la geodésica.	Cambiando la medida de uno de los elementos notan que se pueden construir infinitos triángulos. Reconocen que la composición del triángulo está limitada tanto en el plano como en la esfera, los ángulos en el plano y la geodésicas en la esfera.
 4. Para responder a la pregunta, necesitamos construir uno o varios triángulos. Para ello, completen la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos de partida y los restantes ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué? Esfera: Infinitos triángulos Porque no está limitado por el ángulo si no por la geodésica. Plano: Infinitos triángulos Figura 83. Respuesta por APa2 de la T4. Fuente: HT. En la DG, después de escuchar la presentación del equipo C y B, el AP3-S3|2:03:00-2:03:47|: "Igual tenemos que son infinitos, la observación que hacíamos a [menciona el nombre del IP] es que, en el plano, pues igual son infinitos, pero estamos limitados al la composición del triángulo porque se pueden hacer hasta 180, pero en la esfera en este caso no porque digamos si usted lo tiene así y después lo quiere hacer así [toma los palillos y hace la muestra (ver figura 84)], pero no está limitado a la medida del ángulo, sino a la medida de la geodésica, que tiene que ser el menor segmento, se puede formar este de acá [señala la geodésica del tercer lado] o se puede formar este de acá [señala el segmento más largo], pero este ya no sería un triángulo en la esfera, entonces, son infinitos, pero están limitados por la geodésica, tienen que ser a fuerza geodésicas para que sea un triángulo".	**Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos. **Reconocen** que tanto en el plano como en la esfera los triángulos están condicionados, por la composición del triángulo y la geodésica. **Retoman** en su argumentación la estrategia utilizada en el plano. **Reconocen** que hay figuras formadas por tres segmentos de recta que no son triángulos.	Argumentando su proceso de construcción toma los palillo (que representan los segmentos planos), para ejemplificar que en la esfera se pueden construir infinitos triángulos pero que están limitados por la geodésica de los lados, es decir que lo máximo que puede medir el lado de un triángulo es una semicircunferencia.
 Figura 84. AP3 ejemplifica que los ángulos en la esfera pueden medir más de 180 grados. Fuente: Video-Sesión 3.		
Caso 3: Tres elementos fijos (seleccionaron LLL) **Plano**		

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
En la DE, la APa2 hace la construcción del triángulo con los tres lados fijos, intenta cambiar los ángulos, pero reconoce que al cambiar los ángulos los lados fijos no se mantienen, por lo que vuelve a construir el triángulo inicial (ver figura 85). Ante ello, el AP3-S3|2:16:58-2:17:11|: "Sí, solo uno se puede hacer [APa1: Porque son fijos, ¿verdad?], sí, no los puede mover, no puede hacer nada [todo el equipo se ríe porque no pueden mover los lados]". (T5) El IP: "Dados esos tres lados fijos, de partida, ¿puedo decir algo de los ángulos?", el AP3-S3|2:17:45-2:17:46|: "Están fijos también [APa1: Están fijos]", el IP: "¿Por qué?", APa1-S3|2:17:51-2:17:56|: "Porque los lados no se pueden mover, no tienen movilidad". El IP: "Su triángulo pareciera que es equilátero, ¿lo es o no? [Porque seleccionaron lados casi del mismo tamaño]". El AP3-S3|2:18:05-2:18:07|: "No, son diferentes". (T6) El IP: "Entonces, ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?", el AP3-S3|2:18:13-2:18:13|: "Uno", APa1-S3|2:18:14-2:18:16|: "Si tengo los tres lados fijos". Figura 85. APa2 construye un único triángulo dado los tres lados fijos. Fuente: Video-sesión 3.	**Seleccionan** tres lados. **Procuran** cambiar la abertura del ángulo. **Notan** que, al cambiar la abertura del ángulo, los lados no se mantienen. **Observan** que los tres lados fijos condicionan y fijan los ángulos. **Deducen y muestran** que solo se puede construir un triángulo.	**Construyendo** un triángulo con los tres segmentos fijos. **Intentando** cambiar la abertura de los ángulos **reconocen** los lados no se mantienen y **establecen** que esos tres lados están limitando el cambio de los ángulos, por lo que **concluyen** que, con esas condiciones iniciales, solo se puede construir un triángulo.
Esfera		
(T5 y T6) En la DE, V-APa2-S3|2:18:24-2:18:40|: "Tienen que cerra en un punto, [AP3: Cuál puso primero, ese], este, [AP3: Es porque creo que hay que poner los tres de un solo], si van a cerrar", el AP3-S3|2:18:46-2:18:48|: "Ahora hay que ver si cierra ahí, al otro punto", marcan los puntos de los segmentos y los nombran A, B y C. El AP3-S3|2:18:57-2:19:39|: "No sé, habría que probar con poner los tres de un solo, vamos a ver, yo voy a agarrar este de acá, ahí, [cada uno toma un lado e intentan conectar los extremos manteniendo tensa la cuerda], [APa1: El lado suyo es igual que el mío creo], no, este es más chiquito, [APa1: Son desiguales todos, verdad], sí, pero habría que ver el punto a donde llega, ese se tiene que marcar, a ese punto, ¿y cómo lo marcamos? [se ríen porque los tres están usando sus dos manos y no pueden marcar los vértices], lic., ayúdenos a marcarlo [piden ayuda a una de las profesoras de práctica (ver figura 86)]", esto también lo registró el investigador-observador (ver figura 87). APa1-S3|2:19:40-2:19:45|: "Pero ese punto donde [menciona a APa2] no debería de llegar, así encima, así como [APa2: ¿Hacer qué?] [la profesora de práctica les pregunta: ¿Dónde quieren que les marque?]".	**Coinciden** los extremos de los segmentos. **Establecen** una estrategia. **Colocan** los tres segmentos al mismo tiempo. **Marcan** los tres vértices del triángulo. **Nombran** los vértices como puntos A, B y C. **Tesan** la cuerda para representar segmentos esféricos. **Comparan** los segmentos y **deducen** que	Toma cada uno de los participantes un segmento y tesando las cuerdas, concluyen que los tres segmentos debe coincidir en sus extremos. Además, notan que los tres segmentos parecen iguales, pero los comparan, de ahí deducen que todos son desiguales.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 86. El equipo A solicita apoyo a la profesora de práctica para marcar los lados esféricos. Fuente: Fotografía-sesión 3.  Figura 87. Nota de investigador-observador sobre la intervención de la profesora de práctica. Fuente: NIO. Al desarmar la esfera, la profesora de práctica les dice: mejor ya no les ayudo, usen la regla, sacar un segmento; con la regla lo marcan y luego los otros, el AP3-S3|2:20:21-2:20:24|: "Ah, sí, hay que marcar el más largo entonces". Marcan un segmento y nombran los extremos como punto A y B (ver figura 88), APa1-S3|2:21:26-2:21:40|: "Marque aquí [AP3: Aquí, este], hasta aquí, ¿verdad? [AP3: No, marque este punto y ahí, sí, con la regla, ese va para acá y el otro va para acá]". Finalmente, marcan los tres puntos y colocan las cuerdas para verificar (ver figura 89).  Figura 88. El equipo A marca un segmento. Fuente: Fotografía-sesión 3.	todos son desiguales. **Establecen** una nueva estrategia. **Trazan** en la esfera el segmento más largo. **Nombran** los extremos del segmento, A y B. **Colocan** las cuerdas que representan los otros segmentos, los **tensan** y los **marcan** en la esfera. **Sobreponen** la cuerdas tensan en el trazo. **Verifican** que los trazos sea segmentos de recta.	Retomando la recomendación que les hace la profesora de práctica, tensan la cuerda que representa el lado más grande, luego tesan las cuerda de los dos nuevos lados y forman y trazan el triángulo. Luego, sobre el trazo del triángulo, sobreponen las cuerdas tensas y corroboran que esos trazos son rectos.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 89. El equipo A marca los vértices del triángulo formado por tres lados fijos. Fuente: Fotografía-sesión 3. (T6) APa1-S3|2:22:22-2:22:23|: "Entonces solo se puede formar uno", el AP3-S3|2:22:23-2:20:26|: "Ahora los tres lados son fijos", APa1-S3|2:22:30-2:23:00|: "Solo uno [refiere a la cantidad de triángulos], sí, porque igual tiene que ser geodésicas, porque se puede hacer aquí como dice él, pero no… yo creo que en el fondo deben ser las magnitudes, [APa2: No necesariamente], pero igual como estábamos hablando de la desigualdad triangular…, la suma de estos dos debe ser mayor que este", APa1-S3|2:23:14-2:23:54|: "La suma de estos dos debe ser mayor que este, la suma de estos dos debe ser mayor que la longitud de este al igual que, si me entienden, porque por ejemplo [menciona a APa2], usted los pusimos al azar, como que lo fuimos midiendo para que marcara punto a punto… se debe descubrir creo yo la desigualdad triangular, solo uno, sí, pero como se forma, dado la desigualdad triangular", APa1 reconoce cada lado en la esfera y luego los coloca en el plano [como cuerdas tensas] para verificar la desigualdad triangular (ver figura 90). El AP3-S3|2:24:04-2:24:11|: "Siento que tiene sentido porque al ser en la esfera". Figura 90. APa1 verifica la desigualdad triangular para triángulos esféricos. Fuente: Video-sesión 3.	**Deducen** y **muestran** que solo se puede construir un triángulo. **Exponen** que los lados de esos triángulos deben ser geodésicas. **Trasfieren** la idea de la desigualdad triangular del plano a la esfera. **Pasan** los segmentos esféricos al plano, tensando las cuerdas en el plano. **Suman** dos segmentos esféricos. **Comparan** la suma de dos segmentos con el tercer lado.	**Construyendo** un único triángulo, establecen que, bajo esas condiciones, y que sus lados deben ser geodésicas, solo se puede construir un único triángulo. Problematizando la desigualdad triangular en la esfera, **colocan** y **tensan** los segmentos de recta esférica en el plano. **Sumando** los dos segmentos más pequeños y lo **comparan** con la medida del tercer segmento.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
En la DG, el IP pregunta lo que pasó en el plano y en la esfera, APa1-S3|2:47:05-2:48:27|: "Bueno, pues con estos lados solo podemos construir un triángulo en el plano, por ende, si los lados están fijos, también sus ángulos son fijos; si no se están moviendo los lados, los ángulos también se mantienen fijos [esto lo describe en sus HT (ver figura 91)]. En la esfera, igual formamos un solo triángulo, solamente que vimos la particularidad, notamos que cuando hicimos las construcciones de los lados del triángulo en la esfera, deben tener ciertas características para poder formar lo que es el triángulo, entonces hay que saber las longitudes, así como en el plano se da la desigualdad triangular, como se cumple verdad, que la medida de dos lados, la suma de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado y también lo pudimos ver en la esfera; qué quiere decir eso, que no pusimos al azar, al punto que calzara justamente, probamos eso, que la suma de dos lados es mayor que el tercer lado en la esfera", el IP pregunta si en la esfera también es un triángulo único, el AP3-S3|2:48:42-2:49:11|: "Igual… igual también tiene que ver lo de la geodésica, porque para formar el triángulo tiene que ser geodésica, si yo trazo los otros, como solo tengo fijo esos tres lados al ser esos tres lados fijos, tienen que ser tres lados geodésicas, entonces siempre van a estar como limitados a ser esos lados más cortos".  5. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características? 3 lados, solo se puede formar 1 triangulo, y los angulos son limitados ya que estan fijos Figura 91. Respuesta por APa1 de la T5. Fuente: HT.	**Deducen** y **reconocen** que, dados los tres lados fijos, tanto en el plano como en la esfera, solo se puede construir un único triángulo. **Exponen** que los tres lados fijos fijan los tres ángulos. **Notan** particularidades en la esfera (sus lados deben ser geodésicas y se cumple la desigualdad triangular). **Prueban** la desigualdad triangular en la esfera.	Exponiendo que tanto en el plano como en la esfera solo se puede formar un único triángulo. Además, reconociendo que en la esfera también se cumple la desigualdad triangular y se debe tener en cuenta que los lados deben ser geodésicas.
Cuando el CP2 estaba presentando su caso y mencionaba que los triángulos que tenían los mismos ángulos en el plano eran infinitos e isósceles, el IP le pregunta si tenían alguna característica que los relacionara, APa1-S3|2:50:11-2:50:12|: "Son semejantes". Al preguntar de dónde podemos deducir esos triángulos, APa1-S3|2:50:23-2:50:24|: "De las paralelas". Al finalizar las presentaciones, el IP pregunta si les gustaría trabajar el caso que faltó, AAL. Todos los equipos, tanto en el plano como en la esfera, aceptaron trabajarlo.	**Reconocen** que cuando se tienen tres ángulos fijos en el plano se forman infinitos triángulos semejantes. **Justifican** los infinitos triángulos por el paralelismo.	Discutiendo el caso del equipo A para el plano. En el que aceptan que se construyen infinitos triángulos, además, que esos triángulos son semejantes consecuencia de la existencia del paralelismo.
Caso extra: Tres elementos fijos (LAA) Plano (T5 y T6) El AP3-S3|3:02:00-3:02:02|: "Un lado, ángulo, ángulo", APa1-S3|3:02:05-3:02:07|: "Un lado fijo y dos ángulos", AP3-S3|3:02:33-3:02:40|: "90, es un rectángulo, igual solo se puede formar uno [la APa2 y el AP3 hacen la construcción de la figura 92]", V-APa2-S3|3:02:41-3:02:43|: "Sí porque están condicionados [refiere al resto de los elementos]".	**Aceptan** trabajar el caso LAA. **Exponen** los elementos de partida. **Notan** que esos elementos fijan a	Construyendo un triángulo con los elementos fijos. Describiendo la construcción que hicieron, observan que el ángulo

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 92. Construcción del equipo A para el caso LAA. Fuente: Video-sesión 3.	los elementos restantes. **Reconocen** que su triángulo es rectángulo. **Muestran** y **deducen** que solo se puede construir un triángulo.	restante es recto, por lo que tipifican el triángulo como triángulo rectángulo. Finalmente, deducen que ese triángulo es único.
Esfera (T5 y T6) El AP3-S3|3:03:20-3:03:53|: "¿Y en la esfera?..., y con un lado, ese es el rollo, ah, es que el lado hay que marcarlo, ¿verdad?". Trazan el lado y marcan los puntos de inicio y final con las letras C y D (ver figura 93). AP3-S3|3:04:56-3:04:59|: "Solo es el lado fijo [APa1: Los otros dos lados se están moviendo]". El AP3-S3|3:05:29-3:07:03|: "Me espera, me espera, no va a quedar, dele, póngalo, sí, en teoría sí, pero, ah, pues sí, salió pando [la recta trazada con la regla no salió continua (ver figura 94)], [APa2: Coloque un puntito acá; refiere a colocar un punto en el lado del ángulo de 45 grados para mantener la abertura (ver figura 95)], no, deslícelo ahí, ese está bueno, pero el otro está malo. Es con el de 60, no, pero aquí no le puso el de 45, pues [APa2: Sí, este tiene 45], pero este es el otro, es que ese es el rollo, este era [solicitan cuerdas y usan la regla esférica como una recta completa (ver figura 95)]". Figura 93. El equipo A traza el segmento CD. Fuente: Fotografía-Sesión 3.  Figura 94. El equipo A traza una recta discontinua. Fuente: Fotografía-sesión 3. Figura 95. El equipo A traza un punto para mantener la abertura de un ángulo. Fuente: Fotografía-sesión 3.	**Exponen** los elementos de partida y sus propiedades. **Establecen** una estrategia. **Trazan** el lado fijo, y **nombran** los extremos como puntos C y D. **Colocan** los ángulos en los extremos del segmento. **Mantienen** el ángulo de 60 grados entre el segmento fijo y la regla esférica. **Agregan** elementos auxiliares. **Marcan** un punto para mantener la abertura del ángulo de 45 grados. **Tensan** un cuerda que pasa del vértice D y el punto que mantienen la abertura del ángulo de 45 grados.	Reconociendo los elementos de partida y exponiendo que solo ese segmento es fijo, por lo que los otros dos segmentos pueden cambiar de medida. Primero trazan el segmento fijo, luego posicionan los ángulos en los extremos. Con la regla esférica representan el otro lado del ángulo de 60 grados y en tercer lado lo construyen marcando un punto en el ángulo de 45 y tensando una cuerda por ese punto.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
APa1-S3|3:07:46-3:07:55|: "Entonces este está fijo, este también [AP3: Y ese también, pero igual solo se puede formar uno]". En la DG, al preguntar lo que pasó en el plano y en la esfera, todo el grupo dijo que solo un triángulo. (T7) Después de dar la indicación, AP3-S3|3:23:26-3:23:33|: "O sea, sería como induciendo a la semejanza, dice usted". En la DG, ante la pregunta, el AP3-S3|3:31:34-3:31:49|: "Yo le puse que sí, yo considero que por los dos lados que tengo y el ángulo, por simple trigonometría puedo encontrar el otro ángulo y siempre van a ser el mismo [esto lo describe en sus HT (ver figura 96)]". En sus HT, APa1 presenta los dos casos que trabajaron como criterios de congruencia de triángulos (ver figura 97).	**Señalan** los elementos fijos. **Deducen** y **muestran** que solo se puede construir un triángulo. **Reconocen** que, si dos triángulos comparten elementos, como en los casos en los que solo se podía construir un único triángulo, ambos triángulos son congruentes. **Ejemplifican** como criterio de congruencia los caso trabajados (LLL, ALA). **Exponen** una estrategia (uso de trigonometría) para calcular los elementos restantes.	Reconociendo que en ese caso también solo se puede construir uno. Asociando la pregunta con los casos trabajados, aceptan que en los casos en los que se podía construir un único triángulo, todos los triángulos que comparten esos elementos fijos, son congruentes.
En su tabla resumen, la APa1 justifica el criterio AAA para triángulos esféricos a la no existencia del paralelismo en la esfera (ver figura 98). Por su parte, la APa2 justifica el caso AAA en el plano por la semejanza, que antes habían asociado al paralelismo, y en la esfera a la no existencia del paralelismo (ver figura 99).	**Describen** los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno. **Exponen** que los lados de los triángulos esféricos son geodésicas. **Notan** que para el caso AAA hay una diferencia entre el plano (se pueden construir infinitos	Señalando una diferencias en el caso AAA. Reconocen que en el plano se construyen infinitos triángulos semejantes y en la esfera solo uno, dado que no existe el paralelismo.

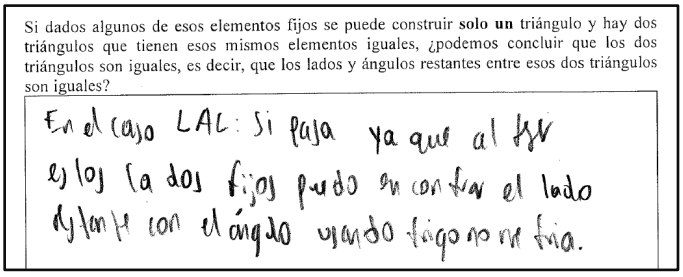


Figura 96. Respuesta por AP3 de la T7. Fuente: HT.

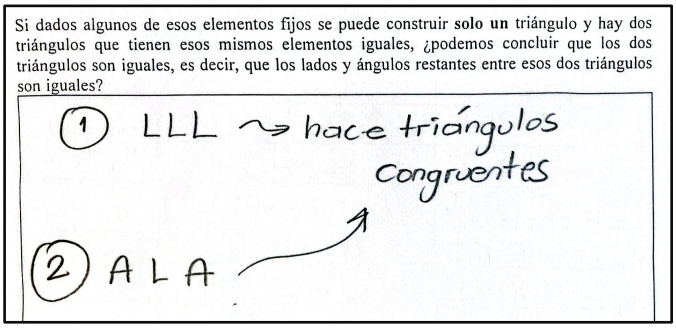


Figura 97. Respuesta por APa1 de la T7. Fuente: HT.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***

Resumen de los casos

¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?

Casos		Plano	Esfera
Un elemento fijo	L	todos los Δ entre $0° < Δ < 180°$	Infinitos
	A	Infinitos	Infinitos
Dos elementos fijos	LL	Infinitos	Infinitos pero el 3lado debe ser geodésica
	LA	Infinitos	Infinitos
	AA	Infinitos	Infinitos
Tres elementos fijos	LLL	1 triángulo	1 triángulo
	LLA	1	1
	LAA	1	1
	AAA	Infinitos	1 triángulo porque no hay paralelismo.

Figura 98. Tabla resumen por APa1. Fuente: HT.

Resumen de los casos

¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?

Casos		Plano	Esfera
Un elemento fijo	L	Infinitos triángulos	Infinitos triángulo
	A	Infinitos triángulos	Infinitos
Dos elementos fijos	LL	Infinitos triángulos	Infinitos
	LA	Infinitos triángulos	Infinitos
	AA	Infinitos triángulos	Infinitos
Tres elementos fijos	LLL	Solo hay un triángulo	Solo hay un triángulo
	LLA	Un solo triángulo	Un solo triángulo
	LAA	Un solo triángulo	Un solo triángulo
	AAA	Infinitos triángulo (semejanza)	Solo un ángulo ningún hay paralelismo

No se puede decir que hay 2 triángulos iguales solo por tener lados fijos.

Figura 99. Tabla resumen por APa2. Fuente: HT.

triángulos) y en la esfera (un único triángulo).
Justifican que en la esfera se puede construir un único triángulo en el caso AAA, porque no hay paralelismo.
Justifican que en el plano se pueden construir infinitos triángulos por la semejanza.

Equipo B:

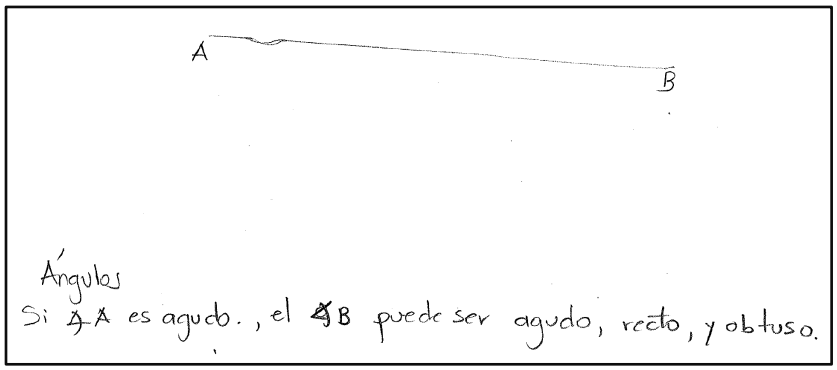
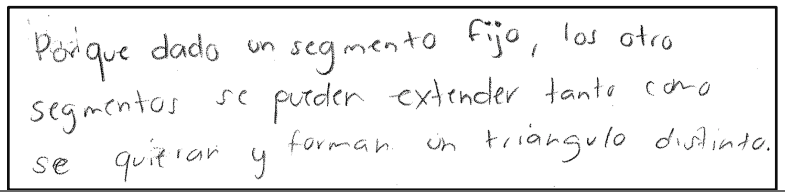
Caso 1: Un elemento fijo (seleccionaron: L)

Plano

(T1) El equipo B seleccionó un segmento. En la DE, V-BP1-S3|0:12:16-0:12:24|: "Sí es recto este debe ser agudo [BPa3: Sí], y este también es agudo", V-BP1-S3|0:13:33-0:13:46|: "El elemento que está fijo es este, pueden cambiar los otros lados y los tres ángulos, entonces estamos viendo los ángulos ahorita", V-BP1-S3|0:13:47-0:14:40|: "Ángulo, cómo varían los ángulos, este ángulo, si es agudo, es que hay que ponerle nombre [BPa3: Colóquele nombre], si el ángulo A es agudo el ángulo B puede ser recto, puede ser agudo o puede ser obtuso [hace la representación del segmento fijo en el plano, nombra sus extremos y muestra en sus HT esta proposición (ver figura 100)]", V-BPa3-

Seleccionan un segmento.
Señalan su elemento fijo.
Exponen su elemento de partida y sus consecuencia (si el ángulo de uno de sus extremos es recto los otros dos son agudos; si el

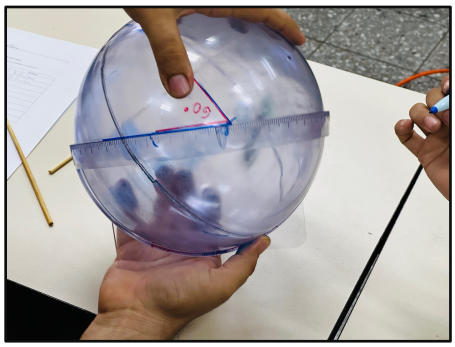
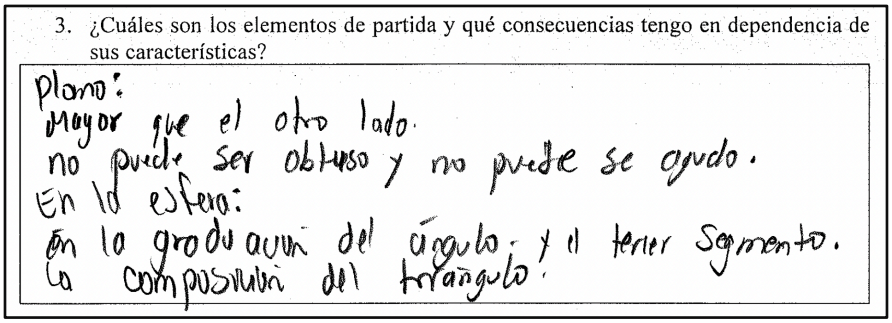
Tomando un segmento fijo, describen que como todos los demás elementos pueden cambiar de medida. Señalando que requieren nombrar los ángulos para establecer proposiciones, de ahí modifican el

Nivel de acción			
Tareas de problematización		***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
S3|0:14:44-0:14:45|: "¿Y de 180?, no verdad", V-BPa2-S3|0:14:45-0:14:50|: "No, porque la suma de los ángulos internos es 180, no se formaría". V-BP1-S3|0:14:56-0:15:14|: "Esta es la condición: si el ángulo A es agudo, ¿cómo va a ser el ángulo B? El ángulo B llano no puede ser porque ya no forma un triángulo, pero puede ser obtuso, puede ser recto y puede ser agudo".  Figura 100. BP1expone casos dado un segmento fijo. Fuente: HT.		primer ángulo es agudo, el otro del otro extremo puede ser recto, agudo u obtuso). **Establecen** una estrategia de construcción geométrica (cambian la medida de los ángulos). **Trazan** el segmento fijo en el plano. **Nombran** los ángulos A, B y C. **Nota** que ningún ángulo puede medir 180 grados. **Justifican** que ningún ángulo puede medir 180 grados porque se deforma el triángulo y porque la suma de los tres ángulos debe ser 180 grados.	ángulo A (de uno de los extremos del lado fijo) y establecen como deben ser los otros ángulos si el ángulo A es agudo, recto u obtuso.
(T2) En la DE, para responder a la pregunta general para el plano, el V-BP1-S3|0:23:57-0:23:59|: "Aquí ya hay otro triángulo [APa3: A dónde]". El V-BP1-S3|0:24:47-0:24:48|: "Es que no sé si son infinitos", BPa3-S3|0:24:50-0:25:00|: "¿Finitos o infinitos?, porque sigue todavía hasta llegar a", el V-BP1-S3|0:25:00-0:25:25|: "Este es un triángulo, este es otro triángulo, y si yo pongo este recto [BPa3: También es un triángulo], [BPa2: De cuántas formas posibles], este ángulo puede ser casi llano y esta extenderse hasta allá [BPa3: Sí, porque sigue]", el V-BP1-S3|0:25:34-0:25:38|: "Entonces, un elemento fijo son infinitos". Cuando el IP les pregunta a qué conclusión llegaron, el V-BP1-S3|0:25:49-0:25:59|: "Infinitos, según nosotros son infinitos, [IP: ¿Por qué?], pero es que no sé, porque aquí estamos moviendo, estos dos se extienden hasta donde usted quiera". El IP pregunta: "¿Y los ángulos?", el V-BP1-S3|0:26:07-0:26:46|: "Bueno, este ángulo se puede mover hasta antes de 180, pero no puede llegar a ser 180... para formar un triángulo. Cuando llega a formar el ángulo de 180, ya no se forma un triángulo". En sus HT, la BPa2 muestra una centración en el cambio de los segmentos y justifica que los triángulos serán infinitos (ver figura 101).  	**Muestran** deferentes casos de triángulos. **Limitan** la abertura de los ángulos (puede ser casi llano). **Prolongan** los lados no fijos del triángulo. **Reconocen** que se pueden construir infinitos triángulos.	Construyendo diferentes triángulos, observan los ángulos se pueden modificar siempre que se sean menores de 180 grados, porque cuando uno de los ángulos es llano se deforma el triángulo. Además, también cambian la medida de los lados no fijos.

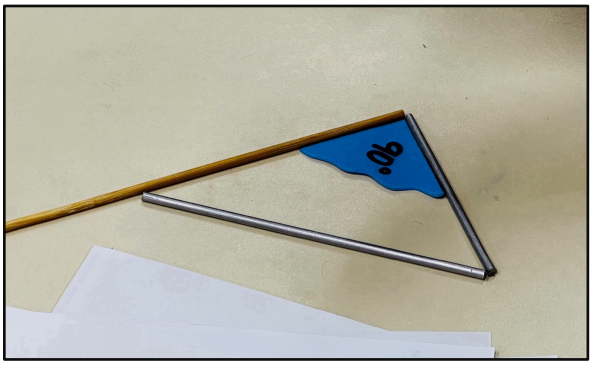
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Figura 101. BPa2 justifica infinitos triángulos dado un segmento fijo. Fuente: HT. V-BPa3-S3|0:27:25-0:27:31|: "Primero es el lado, entonces, es finito o infinito". El V-BP1-S3|0:27:31-0:28:15|: "Es que este lado está fijo, este es el elemento fijo, pero la pregunta es cuántos triángulos diferentes se pueden construir en el plano y hay infinitas opciones ahí, o sea, el ángulo se ve limitado… el porqué". En la DG, el V-BP1-S3|0:34:24-0:35:23|: "Bueno, dado un segmento fijo, nos dábamos cuenta de que estos dos lados podrían moverse tanto como quisiéramos, hacia un lado o hacia otro. Los lados no se ven limitados, porque los lados se pueden extender tanto como nosotros queramos; los que se ven limitados son los ángulos, porque el ángulo puede ser obtuso, pero hasta cierta medida, hasta cierto punto, porque si ya se forma, si se llega a formar un ángulo de 180 grados, ya se pierde la composición de lo que es un triángulo, entonces, ya no se puede formar un triángulo. Pero, dado este segmento, se pueden formar infinitos triángulos".	**Señalan** el segmento fijo. **Limitan** la abertura de los ángulos, ninguno puede sumar 180 grados. **Prolongan** los lados no fijos. **Condicionan** la construcción de los triángulos. **Reconocen** que se pueden construir infinitos triángulos.	Construyendo diferentes triángulos, observan los ángulos se pueden modificar siempre que se sean menores de 180 grados, porque cuando uno de los ángulos es llano se deforma el triángulo.
Esfera		
(T2) En la esfera, DE, el V-BP1-S3|0:55:05-0:55:23|: "Serían infinitos también", V-BPa3-S3|0:55:10-0:55:13|: "No, finitas acuérdese, no serán finitas", el V-BP1-S3|0:55:21-0:55:30|: "Es que es lo mismo [BPa3: Lo mismo sería, sí], es que igual acá puede ser obtuso y otro segmento", V-BPa3-S3|0:55:52-0:55:54|: "Es que mire que se forman varios ángulos", el V-BP1-S3|0:56:10-0:56:52|: "Vamos a ver, si yo tengo este acá y trato de extenderlo, extenderlo, todo, todo, todo; porque en estas, decíamos que estas cosas se extendían, ¿verdad?, [BPa3: Por eso le decía que aquí, será que no] [a esto se refería cuando decía que eran finitas, a que las rectas eran finitas], es cierto, si usted extiende va a poner acá [llegar al inicio] y si extiende este va a llegar acá, entonces, se forma un triángulo acá, y se va a formar un ángulo también acá, se forman dos triángulos… ya van a ver que se va a formar", estaba esperando la regla, el V-BP1-S3|0:57:00-0:57:02|: "O necesitamos un cordón más grande", el V-BP1-S3|0:57:00-0:57:22|: "Pero es que se van a formar dos triángulos [está pensando en el trazo de tres rectas completas y los triángulos son opuestos]…, imagínense que este segmento de acá lo extienden todo", V-BPa2-S3|0:57:33-0:57:49|: "Pero aquí creo que no pueden ser infinitos porque, es cierto, la superficie es finita, no puede extender demasiado eso [BPa3: Pero el detalle es que aquí son triángulos], por eso", el V-BP1-S3|0:57:53-0:59:52|: "Lo que les digo yo es esto, extiendo este, este ángulo es agudo, puede ser recto, [BPa3: Ahí está recto], y puede ser obtuso; pero ya no puede ser así tampoco, porque aquí ya no se formaría el triángulo, entonces, pero lo que les estoy diciendo yo es que si completo toda esta vuelta [marcan la circunferencia completa], y si yo trazo una acá, [BPa3: Creo que van a ser infinitos], sí, son infinitos iguales, porque este puede ser agudo acá, puede ser recto, puede ser obtuso, sí igual, es lo mismo que en el plano".	**Exponen** el elemento de partida y sus consecuencias. **Cambian** la abertura de un ángulo. **Prolongan** los segmentos no fijos. **Establecen** (erróneamente) que pueden ser triángulos finitos porque las rectas son finitas. **Trazan** tres rectas esféricas. **Reconocen** que se forman dos triángulos opuestos. **Notan** que el ángulo en uno de sus extremos puede ser agudo, recto o obtuso. **Exponen** que dado un segmento fijo son las mismas consecuencias que el plano. **Reconocen** que se puedes construir infinitos triángulos.	Reflexionando si se cumple lo mismo que el plano, reconocen que el ángulo de uno de los extremos del segmento fijo puede ser agudo, recto u obtuso. Inicialmente creen que como las rectas son finitas la cantidad de triángulos formados en la esfera son finitas, pero al cambiar la medida de los ángulos deducen que se construyen infinitos.

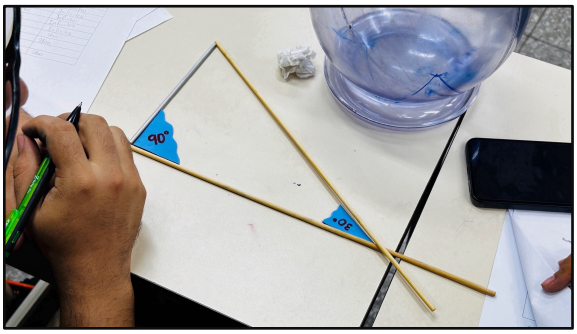
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
El IP pregunta, a qué conclusión llegaron, el V-BP1-S3|1:00:59-1:01:00|: "Igual, que son infinitos", el V-BP1-S3|1:01:04-1:01:38|: "Es que nosotros tratamos de hacer lo mismo [refiere a lo que hizo el equipo A, la construcción del equipo B se puede ver en la figura 102], y trazamos esta circunferencia máxima para ver que este ángulo igual puede ser agudo, puede ser recto o puede ser obtuso, entonces, se mantienen las mismas características que en el plano, pareciera, de que estos segmentos los puedo extender tanto como quiera, pero va a llegar a un límite el ángulo siempre, pero igual siempre, en este caso no sé si sería lo apropiado decir 180, pero en el caso de que se formen de llegar a la misma línea donde está la circunferencia máxima donde se encuentra el segmento". El IP le pregunta: "¿Por qué piensa que no es apropiado decir 180?", el V-BP1-S3|1:01:56-1:02:27|: "No sé, creo que tengo la noción de que aquí los ángulos no son iguales [el IP les recuerda que al caracterizar los ángulos ellos dijeron que eran iguales al plano], o sea, la cuestión es que en el triángulo, si formamos un triángulo acá en la esfera, siento que la sumatoria, que uno sabe que son 180 los tres, no se va a dar, pero no sé, no estoy tan seguro de eso".	**Reconocen** que se construyen infinitos triángulos. **Notan** que el ángulo en uno de sus extremos puede ser agudo, recto u obtuso. **Exponen** que se mantienen las mismas características que el plano. **Establecen** que los ángulos también están limitados, pero no están seguros hasta donde. **Cuestionan** la suma de los ángulos internos de un triángulo.	Discutiendo con el IP, muestran que las características son igual que el plano. De ahí deducen que pueden cambiar los ángulos. Reconociendo que los ángulos están limitados cuestionan la suma de los ángulos internos de los triángulos, pero aún no tiene claro cómo es esa sumatoria.
 Figura 102. Construcción del equipo B dado un lado fijo. Fuente: Fotografía-sesión 3. En la DG, después de escuchar la opinión de AP3, el V-BP1-S3|1:11:14-1:12:24|: "Ah bueno, de los lados siempre se mantiene que son infinitos, pero lo justificamos con respecto a los ángulos, nosotros teníamos este segmento fijo, ahorita que se acaba de ir usted estaba viendo lo de los ángulos de 180, de que los triángulos en el plano se cumplen las propiedades de que los tres suman 180, pero entonces se nos ocurrió marcar dos perpendiculares, como los meridianos que pasan por la circunferencia máxima, por donde pasaría el segmento fijo, entonces trazamos la perpendicular y se tocan en un punto, este punto sería el polo, pero este ángulo si es perpendicular sería de 90, este de 90, entonces entre los dos sumarían 180, pero qué pasa con este ángulo [señala el tercer ángulo], entonces ahí la propiedad no se cumple".	**Establecen** una estrategia de construcción. **Exponen** que los ángulos internos de un triángulo en el plano suman 180 grados. **Trazan** dos perpendiculares en los extremos del segmento fijo. **Exponen** que esas perpendiculares se intersecan en el polo del segmento fijo. **Señalan** que han construido un triángulo birrectángulo. **Reconocen** que en la esfera no se cumple que la suma de los ángulos internos es 180 grados.	Construyendo un contraejemplo, un triángulo birrectángulo, concluyen que en la esfera no se cumple que la suma de los ángulos internos suma 180 grados. Utilizando la teoría de la polaridad, encuentran el polo del segmento fijo y construyen el triángulo birrectángulo.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Caso 2: Dos elementos fijos (seleccionaron: LA)		
Plano		
(T3 y T4) Seleccionaron un ángulo de 90 grados y un lado, el V-BP1-S3|1:38:35-1:39:25|: "Pero este puede ser hasta 89.99999, porque este puede extender, pero 90 no, entonces igual se puede formar infinitos, … Solo que los elementos es que los lados pueden ser tan largos como sean, pero los ángulos, si se fijan ustedes, este es 90, entonces este tiene que ser complementario [refiere a que los dos restantes deben ser complementarios], [BPa3: Tendrían que medir 45], pero igual son infinitos [BPa2: Sí, es cierto], porque de aquí yo puedo tener este ángulo, este otro, este otro; pero no puede llegar a 90". El IP: "Dados esos elementos fijos, ¿qué puedo decir de los otros elementos?" El V-BP1-S3|1:39:34-1:39:50|: "Bueno, los otros dos lados pueden ser tan grandes como sean o tan pequeños, bueno, tan pequeños no, este no puede llegar a ser el mismo que este, tiene que ser mayor [por ser la hipotenusa]". El IP: "Puedo decir algo de los otros ángulos", el V-BP1-S3|1:39:59-1:40:25|: "De los ángulos, bueno, dado que este es 90, tendrían que ser complementarios, cierto que este es 90, pero [el IP pregunta si deben ser suplementarios para llegar hasta 180], no, estos dos [señala los dos ángulos restantes], [IP: O sea que este no puede ser recto], ajá, este no puede ser recto, debe ser agudo". (T4) El IP les pregunta por la cantidad de triángulos que se pueden construir, el V-BP1-S3|1:40:40-1:40:43|: "Infinitos, siempre siguen siendo infinitos". V-BPa3-S3|1:41:00-1:41:01|: "Este es el ángulo, ¿verdad?", V-BPa2-S3|1:41:01-1:41:02|: "No, ese es cuando fijemos tres; ahorita solo estamos fijando dos", V-BP1-S3|1:41:22-1:41:34|: "A nosotros nos toca lado y ángulo… este está condicionado, si lo tengo así, ¿verdad?, este tiene que ser mayor a este, porque si es igual ya no se puede", V-BPa2-S3|1:41:35-1:41:45|: "No, es mentira porque [BPa3: Dejaría de ser] si es igual, sería isósceles [BPa3: Dejaría de ser]", V-BP1-S3|1:41:45-1:41:56|: "Es que sí, puede ser igual, pero mire, ya, este ángulo ya no se mantiene [APa3: Exacto]".	**Seleccionan** un ángulo recto y un lado. **Establecen** que el ángulo del otro extremo del segmento fijo no puede llegar a ser recto. **Modifican** la abertura del ángulo que está al otro extremo del segmento fijo. **Prolonga y acortan** los segmentos no fijos. **Establecen** que los otros dos ángulos deben ser complementarios. **Establecen** que la hipotenusa debe ser siempre mayor que el segmento fijo. **Condicionan** la medida de segmentos y ángulos. **Construyen** triángulos rectángulos isósceles. **Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos.	Colocando el ángulo recto en uno de los extremos del segmento fijo deducen que ese segmento será un cateto, por lo que la hipotenusa pueden cambiar de medida sin ser igual o menor que el segmento fijo. Además, sobre los ángulo, cambiando la medida del ángulo que está en el otro extremos del segmento fijo deducen que este puede cambiar de medida sin llegar a ser recto y que los dos ángulos no fijos van a ser suplementarios. Exponiendo la construcción de varios triángulos rectángulos deducen que bajo esas condiciones pueden construir infinitos triángulos.
Esfera		
(T3) V-BP1-S3|1:42:08-1:42:10|: "Ahora, en el coso este, hay que medirlo". Marcan el segmento y el ángulo en la esfera (ver figura 103). V-BP1-S3|1:44:25-1:45:11|: "Entonces lo mismo, este se extiende…, pero vamos a ver, este lado tiene que ser mayor a este, porque aquí ya dibujamos el ángulo y este se extiende. Aquí es donde mide 60 [la medida del ángulo seleccionado]; se extiende, pero igual que con el otro plano. Este, por ejemplo, tiene que ser mayor a este. Es que este ángulo del otro lado, para formar un triángulo, puede ser agudo, puede ser recto y puede ser obtuso". V-BP1-S3|1:45:21-1:46:01|: "Pero tiene que llegar hasta 180, igual llega hasta 180; yo estoy con los segmentos, pero igual se dan infinitos triángulos porque va graduando y se van a ir	**Establecen** una estrategia de construcción. **Trazan** los elementos fijos, el segmento y el ángulo en la esfera. **Prolonga y acortan** los segmentos no fijos. **Modifican** la abertura del	Trazando los elementos fijos, el ángulo y el segmento, caracterizan el tipo de ángulo que podrían tener en el otro extremo del segmento fijo. Como el ángulo fijo es de 60 grados exponen que el ángulo del otro extremo del

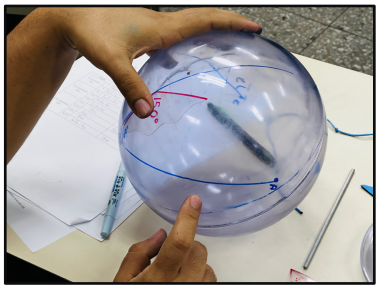
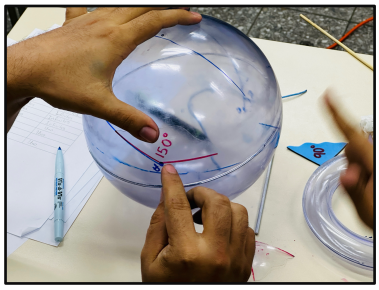
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
encontrando con este y este también puede ser tan pequeño y aquí siempre va a medir 60, entonces siempre son infinitos". La BPa3 utiliza esas ideas como argumento para hablar de la infinitud; sin embargo, reconoce que están limitados por la composición del triángulo (ver figura 104). V-BPa3-S3|1:46:06-1:46:07|: "Conclusión, infinitos".  Figura 103. Construcción del equipo B dado un ángulo y un lado. Fuente: Fotografía-sesión 3.  3. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características? Plano: Mayor que el otro lado. no puede ser obtuso y no puede se agudo. En la esfera: En la graduación del ángulo. y el tercer Segmento. La composición del triángulo. Figura 104. Respuesta por BPa3 de la T3. Fuente: HT.	ángulo que estaría en el otro extremos del segmento fijo. **Establecen** que el ángulo que está al otro extremo del segmento fijo puede ser agudo, recto u obtuso. **Condicionan** erróneamente, la medida de los ángulos internos a 180 grados. **Condicionan** la construcción de triángulos a su composición. **Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos.	segmento fijo puede ser agudo, recto u obtuso, siempre buscando que la suma de los ángulos internos se mantenga en 180 grados. Al cambiar la medida de los segmentos no fijos y de los ángulos deducen que bajo esas condiciones pueden construir infinitos triángulos, condicionado por la composición del triángulo.
(T4) El IP: "a qué conclusión llegaron", V-BP1-S3|1:47:06-1:47:43|: "Igual, siguen siendo infinitos porque, por ejemplo, aquí tenemos el segmento y el ángulo, este ángulo puede extenderse y se va a mantener fijo [toma el ángulo del otro extremo del segmento fijo], entonces este otro segmento, puedo trazar otro segmento del punto B y puede ser menor que 180, verdad, pero puede haber infinitos triángulos moviendo ese ángulo, siempre se va a ir encontrando con este, entonces siempre van a ser infinitos", V-BPa3-S3|1:47:49-1:48:01|: "Por qué ahora… el porqué usted lo dijo", V-BP1-S3|1:48:06-1:48:35|: "Sí, tenemos el porqué, pero cuál es la palabra, aquí este otro lado, básicamente el tercer lado, hay infinitos triángulos porque el tercer lado puede variar en su ángulo tanto como, o la graduación del ángulo del tercer ángulo, del segundo ángulo, este es el ángulo fijo, [BPa3: Este sería el segundo]", V-BPa2-S3|1:48:38-1:48:42|: "Este se puede extender hasta el momento en que se llega a alcanzar este de acá", V-BPa3-S3|1:48:45-1:48:45|: "Entonces sería el segundo", V-BP1-S3|1:48:47-1:48:48|: "Sí, porque este que se forma aquí es el tercero". V-BP1-S3|1:48:51-1:49:10|: "Entonces, el segundo ángulo, ¿al trazar el segundo ángulo o al trazar el tercer segmento? [BPa3: Al trazar el tercer	**Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos. **Modifican** la abertura del ángulo que está al otro extremo del segmento fijo. **Nombran** los vértices de los triángulos. **Notan** que al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia. **Nombran** los ángulos como: primero, segundo y tercer. **Condicionan** el cambio de medida de un segmento al	Señalando los elementos fijos y no fijos, establecen las posibilidades de los elementos no fijo, cambian la medida de los elementos no fijos y establecen que se construyen infinitos triángulos, pero para argumentar el proceso constructivo nombran los ángulos como primero, segundo y tercer ángulo; en la exposición de su construcción reconocen que el cambio de medida de un ángulo cambia la medida del ángulo opuesto.

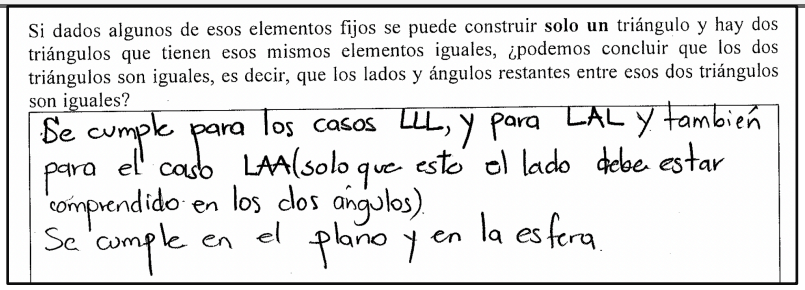
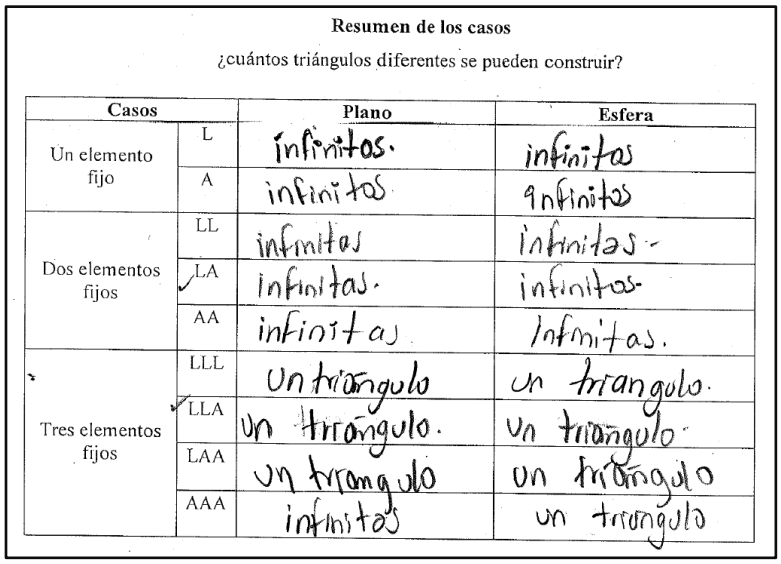
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
segmento], pero es que el tercer segmento varía conforme al ángulo, a la graduación del ángulo". Al escuchar la discusión del equipo A, V-BPa3-S3|1:49:50-1:49:51|: "¿Qué es la geodésica?", V-BP1-S3|1:49:58-1:50:14|: "Es la distancia mínima entre dos puntos, la distancia mínima entre los dos puntos en la esfera, pero en el plano, aquí yo tengo dos puntos y la distancia mínima en la recta, porque puedo tener este, pero no es la distancia mínima". V-BPa3-S3|1:50:21-1:50:22|: "Entonces, a la conclusión a la que llegamos, es lo que dijo usted". V-BP1-S3|1:50:23-1:50:35|: "Hay que poner eso, porque la graduación del segundo ángulo y con el tercer segmento", la V-BPa2-S3|1:50:51-1:50:53|: "Porque la graduación puede variar tanto como queramos". En la DG, V-BP1-S3|2:02:28-2:02:51|: "De igual forma se forman infinitos triángulos, al mantener un ángulo y un lado fijo; en la otra contraparte del otro lado, el ángulo puede ir variando tanto como quiera, y encontrarse con el otro lado e ir formando infinitos triángulos".	cambio de medida del ángulo opuesto. **Cuestionan** el significado de geodésica. **Identifican** segmentos de recta que no son geodésicas. **Nombran** los ángulos como: primero, segundo y tercer. **Condicionan** el cambio de medida de un segmento al cambio de medida del ángulo opuesto. **Deducen y muestran** que se pueden formar infinitos.	Al escuchar la discusión de otro equipo, reconocen geodésicas y segmento de recta que no son geodésicas, pero a pesar de limitar la construcción del triángulo con geodésicas establecen que se forman infinitos triángulos.
Caso 3: Tres elementos fijos (seleccionaron LLA) Plano (T5) La V-BPa3-S3|2:24:11-2:24:42|: "Nos falta un lado, ¿verdad?, un lado nos falta [BPa2: A ver cuál nos da], no, nosotros tenemos que elegir, ¿verdad?, [menciona a BP1] no sé si un lado o un, [BPa2: No, él nos va a decir para que tengamos todos diferentes, nosotros que tenemos un ángulo [de 90 grados] y un lado, o nos puede dar otro ángulo], u otro lado, [BPa2: ¿Cuál trabajamos?], [BP1: Otro lado]". V-BP1-S3|2:26:12-2:26:42|: "Lado, lado y ángulo; pero y este ángulo, ¿dónde tiene que estar? Entre los dos lados, tiene que estar entre los dos [BPa3: Sí], porque si está acá no se puede formar, no se pueden formar triángulos y si está acá tampoco [prueba colocando el ángulo en los extremos], tiene que estar entre, eso es lo primero". V-BP1-S3|2:26:50-2:26:56|: "Sí, porque ahí no dice a dónde, porque dice lado, lado, ángulo". El IP les indica que pueden colocar el ángulo donde gusten, es decir, ALL, LAL, LLA; V-BP1-S3|2:27:03-2:27:21|: "Pero eso nos estábamos dando cuenta, de que el ángulo tiene que estar acá [entre los lados, el IP: Por qué], tendría que tener el segmento acá, [BPa2: Es que es fijo]". El IP pregunta si puede estar LLA, V-BPa2-S3|2:27:40-2:27:41|: "Si son fijos no se puede", V-BP1-S3|2:27:41-2:27:51|: "Aquí sí, [BPa2: Ahí sí], por qué el otro no [coloca LLA (ver figura 105)]". EL IP: "Dado esos elementos que tienen de partida, ¿qué podemos decir de los otros elementos?", el V-BP1-S3|2:28:24-2:29:05|: "Bueno, los otros, dado que este mide 90, lo mismo, que estos tienen que ser complementarios [que los otros dos ángulos deben sumar 90 grados]. Este segmento [el tercero], ya se ve delimitado, tiene que tener una medida exacta para formar el triángulo, porque si ya lo hago más, o sea, esta sería la medida exacta para formar el triángulo, que	**Seleccionan** dos lados y un ángulo recto. **Prueban** formar el triángulo colocando los elementos ALL. **Establecen** que el ángulo debe estar entre los dos lados fijos. **Establecen** que, al colocar el ángulo entre los lados, LAL se puede forman un único triángulo. **Notan** que, al colocar los elementos, LLA también se forma un único triángulo. **Establecen** que los dos ángulos no fijos son complementarios. **Notan** que en esas condiciones el tercer lado está limitado. **Establecen** que esos elementos	Toman los elementos fijos y prueban colocarlos en diferente orden: ALL, LAL y LLA. De sus pruebas deducen que en el caso ALL no se forma el triángulo y de las otras dos opciones se forma un único triángulo. Es decir, que los elementos fijos condicionan y fijan a los elementos restantes.

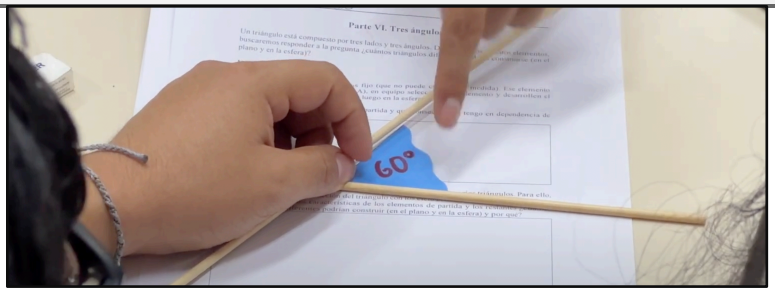
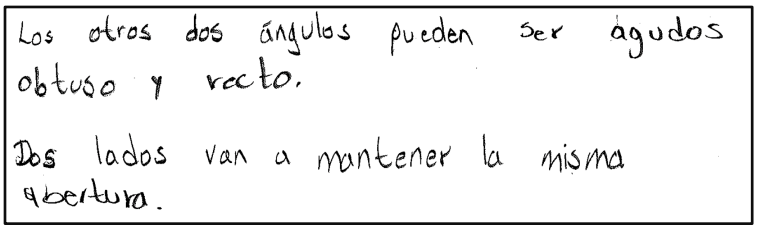
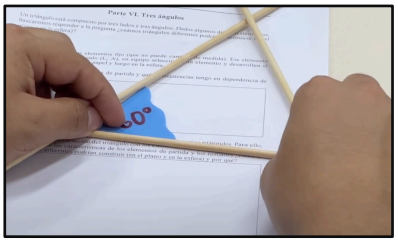
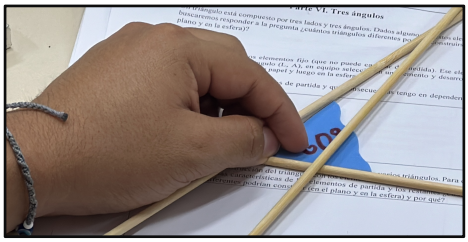
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
si mide más, ya no; si mide menos, tampoco, entonces la longitud del tercero estaría condicionada".  Figura 105. Construcción del equipo B para el caso LLA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3. (T6) El IP: "Me está diciendo que solo se puede construir un triángulo", V-BP1-S3|2:29:12-2:29:18|: "Sí, porque si lo pongo en medio de estos dos también solo se puede formar uno", V-BPa2-S3|2:29:29-2:29:37|: "Es cierto, al principio decía que se podían formar más, pero me acordé después que estos dos estaban fijos y es cierto, por eso solo se puede formar uno".	fijos condicionan o fijan los otros elementos. **Establecen** que, al colocar el ángulo entre los lados, LAL se puede forman un único triángulo. **Deducen y muestran** que se puede formar un único triángulo.	
Esfera		
(T5) La V-BPa3-S3|2:29:48-2:29:50|: "Entonces hagamos los puntos ahora [menciona a BP1]", V-BP1-S3|2:30:04-2:30:05|: "¿Cuál es el segundo lado?". V-BP1-S3|2:30:35-2:30:51|: "Pero, puede ir acá, no, pero es que estamos pensando que el ángulo va en medio de los dos", V-BPa3-S3|2:30:51-2:30:55|: "Pero si marcamos con la regla, sería mejor". Hacen la construcción en la esfera, V-BP1-S3|2:31:22-2:31:41|: "Bueno, pero aquí está el de 60, pero tendríamos que hacer el otro caso, que el ángulo esté aquí [refiere a LLA o ALL], el ángulo puede estar acá", V-BP1-S3|2:31:51-2:32:38|: "Es que el ángulo puede estar acá, pero el segmento este [BPa2: Siempre es fijo], no, ya, este ángulo ya no mediría 60 [refiere al ángulo entre los lados fijos], es la misma idea de esto, nosotros tenemos este ángulo en el plano y estamos poniéndolo en medio, sería esto mismo, entonces el tercer lado se ve condicionado, o puede haber otro, tiene que ser la geodésica que pase por los dos lados, si está en medio", V-BP1-S3|2:32:40-2:34:56|: "Pero, como lo que hizo el lic. [refiriéndose al IP], es que podría estar así, si me entienden, o sea, por ejemplo, miren esto, aquí forma un triángulo, mire el ángulo dónde está, está en el segmento que no tengo, entonces, si yo pongo este aquí, marco ese segmento [BPa3: Es el segmento que dice que no está], aquí ya no hay 60 [el ángulo entre los lados fijos], entonces, si pongo el ángulo acá, este segmento también es único, o no, porque este no está condicionado o sí, [BPa3: Es que es lo mismo que tenía acá], dónde está el segmento	**Trazan** los segmentos fijos en la esfera, **Prueban** organizar sus elementos de las tres formas posibles: ALL. LAL, LLA. **Cambian** la medida de un lado fijo, por lo que deducen erróneamente que pueden construir infinitos. **Señalan** los elementos fijos. **Notan** que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos.	Trazando los elementos fijos en la esfera. Inicialmente, tomo como elementos fijos el ángulo y uno de los lados por lo que establecen, erróneamente, que se pueden construir infinitos, luego notan que el tercer lado que también es fijo lo están cambiando de medida.

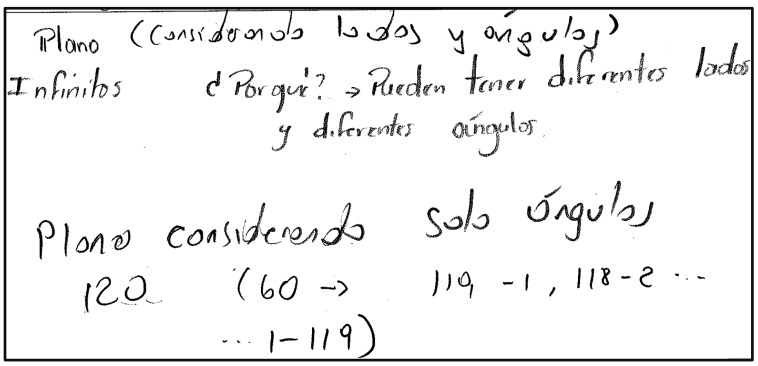
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
2, este es el más pequeño, pero si yo pongo este aquí, me entiende, si pongo este aquí y pongo el 60 ahora acá, se forma otro acá". (T6) V-BP1-S3|2:35:07-2:36:15|: "Pero parece que son perpendiculares ustedes [BPa3: Sí], será que estas van al polo, porque yo estoy manteniendo este segmento fijo y este también fijo, pero miren si yo lo pongo acá, se pueden formar infinitos triángulos. Miren, ahh no, [BPa2: Este hay que considerarlo también, porque está fijo el de abajo], ahh es cierto, [BPa2: El de abajo también es fijo], es cierto, estoy formando este triángulo, este está fijo, pero este también, pero no llegan a formar acá, es cierto, solo es uno". En la DG, V-BP1-S3|2:51:18-2:52:17|: "Bueno, en el plano nos dimos cuenta que podíamos colocar ese ángulo entre los dos lados o podríamos colocarlo y en el exterior del otro lado, pero de igual forma probamos que el tercer lado se veía condicionado; o sea, la longitud del tercer lado estaría condicionada por lo que solo se podría formar un triángulo, eso en el plano. De igual forma, en la esfera, los dos segmentos que formamos eran geodésicas y también corroboramos colocar el ángulo entre los dos segmentos y en la parte superior del otro segmento [refiere al extremo de uno de ellos], y también la tercera geodésica era única, entonces era única la otra, entonces solo se podía formar un triángulo".	**Nota** que se forma un ángulo de 90 grados, por lo que **deducen** que uno de los lados de ese ángulo puede pasar por el polo del otro lado. **Deducen y muestran** que se puede formar un único triángulo. **Notan** que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos. **Señalan** que los lados del triángulo en la esfera son geodésicas.	Al fijar los tres elementos, notan que uno de los otros dos ángulos parece de 90 grados, por lo que establecen que uno de los lados del ángulo pasa por el polo del otro. Finalmente notan que bajo esas condiciones tanto en el plano como en la esfera solo se construye un triángulo.
Caso extra: Tres elementos fijos (LAA) **Plano** (T5) El IP les pregunta: "¿Con qué lado [de los dos que tienen] quieren quedarse, con el corto o el largo?", el V-BP1-S3|3:08:13-3:08:26|: "Pero no va a funcionar con este [IP: Deben seleccionar pensando en la composición del triángulo], el corto". V-BPa3-S3|3:08:35-3:08:38|: "El ángulo, lado, ángulo". (T6) Hacen la construcción que se presenta en la figura 106, V-BP1-S3|3:09:34-3:10:33|: "Igual, solo uno, porque si pongo este aquí [BPa3: Al contrario, póngalo ahí], miren, aquí tiene 30, pero no llega allá [APa2: No llega], pero puede acá, pero puede ser acá, hasta ahí, pero igual solo se forma uno [BPa2: Sí]". V-BP1-S3|3:10:36-3:10:56|: "¿Puede formar infinitos? Porque el ángulo este lo puedo mover acá, pero el segmento no llega acá, no va a llegar allá, entonces son condicionados los lados, o sea, este ángulo, uno, un triángulo".  Figura 106. Construcción del equipo B para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.	**Seleccionan** los elementos dependiendo de la composición del triángulo. **Colocan** los elementos en diferentes posiciones para verificar si se forma el triángulo: ALA, AAL, LAA. **Deducen y muestran** que se puede formar un único triángulo.	Como ya tenía un ángulo recto, mencionan que el segundo ángulo que seleccionen debe ser agudo. Organizan los elementos fijos y nos fijos en diferentes posiciones y deducen que bajo esas condiciones solo se puede formar un único triángulo.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
V-BPa3-S3|3:11:04-3:11:06|: "Con esos lados, solo uno", el V-BP1-S3|3:11:06-3:11:08|: "Sí, solo es uno, solo uno se puede". El IP: "cuántos en el plano", V-BP1-S3|3:11:13-3:11:08|: "Uno. Intentamos hacer esto primero, entonces nos dimos cuenta de que solo se formaba uno, pero este lado que no sabemos cuánto es, entonces podríamos colocarlo acá, así, pero nos dábamos cuenta de eso, que podemos colocarlo acá, pero el tercer lado no va a formar el triángulo con este porque este es fijo, entonces solo puede estar moviendo el ángulo [sin cambiar la medida del ángulo, lo mueve por el lado no fijo], hasta que se encuentran [prueba colocar los elementos de diferentes formas: AAL, ALA, LAA]", el IP les dice además que este ángulo es fijo [el tercer ángulo], V-BP1-S3|3:11:51-3:11:55|: "Sí, por la suma de los tres ángulos tiene que ser fija".	**Deducen y muestran** que se puede formar un único triángulo. **Cambian** los ángulos de posición. **Establecen** que el tercer ángulo está fijo por la suma de los ángulos interiores del triángulo.	Cambiando la posición de los ángulos fijos prueban formar triángulo colocando: AAL, ALA y LAA. Reconociendo que el tercer ángulo y los otros dos ángulos están limitados o también son fijos.
Esfera		
(T5) Al entregarles el ángulo esférico extra, seleccionan uno de 150 grados, V-BP1-S3|3:08:37-3:08:45|: "Este, tal vez funciona, tal vez funciona", V-BPa2-S3|3:08:45-3:09:07|: "Y este [señala el otro ángulo esférico], [BP1: 60 era, pero se borró; refiere a la medida del segundo ángulo], y entonces cómo, pero y este, ¿150 y 50?, [BP1: Espérese, hay que ver]". V-BPa2-S3|3:12:06-3:12:13|: "¿Y en la esfera? Pero hay que mejor marcarlos, hay que volver a marcarlos". V-BPa3-S3|3:12:16-3:12:27|: "Y el otro cordón se los llevaron [BP1: Solo es un lado fijo], [BP2: Ahorita solo es un lado fijo, porque estamos LAA]". Hacen la construcción del segmento, V-BP1-S3|3:13:16-3:13:22|: "Espéreme que vamos a ver si funciona con ese ángulo que agarramos, porque yo lo agarré así al sopapo [significa que lo tomó al azar]", V-BP1-S3|3:13:31-3:13:53|: "Yo tengo este …, hay que extenderlo, extiéndalo, [BPa3: Pero con la regla o con el marcador], vamos a marcarlo medio y después le da con la cosa [BPa3: Pero aquí está la regla]".	**Seleccionan** un ángulo de 150 y otro de 60. **Prueban** formar un triángulo en el que la suma de sus ángulos internos sea mayor a 180 grados. **Trazan** el segmento fijo. **Señalan** los elementos fijos. **Prolongan** los segmentos no fijos.	Como quiere verificar si en la esfera se pueden construir triángulos en los que la suma de sus ángulos internos es mayor que 180 grados, tomando un ángulo de 150 grados y otro de 60 grados, buscan corroborar esa conjetura.
(T6) V-BP1-S3|3:14:00-3:14:09|: "Este se puede extender, entonces, como se puede extender lo vamos a marcar todo", V-BP1-S3|3:14:21-3:16:16|: "Y ahora el de 150, sí se puede, 150 y 60, si lo pongo acá [BPa3: Ahh es cierto], pero igual es único, aquí se va a unir, pero y si lo pongo acá [prueban colocar el ángulo de 150 en las formas AAL (ver figura 107a) y ALA (ver figura 107b)], si lo pongo acá tendría que moverlo acá [BPa2: Cuál es la fija, esta de acá, verdad, no, pero si usted lo pone acá], no va a llegar, pero aquí si funciona, o no, ¿tampoco funciona, verdad?, no, porque tiene que llegar acá, [BPa3: No, no llega], pero si lo pongo aquí sí o no [mueve el ángulo en diferentes partes del segmento no fijo para verificar en que posición el tercer lado podría coincidir], sí, [BPa2: Acá sí, porque si usted extiende este y se choca], se choca, o sea deben estar contrarios, el lado debe ser el comprendido entre los dos ángulos, porque si lo pongo acá no funciona. Mire, aunque lo ponga bien pegadito [si acerca los dos ángulos (como en	**Establecen** una estrategia de construcción. Para un segmento no fijo **trazan** una recta completa. **Trazan** el segmento fijo con el ángulo de 60 grados en relación con la recta completa. **Colocan** el ángulo de 150 grados en diferentes posiciones. **Mueven** el ángulo de 150 sobre la recta.	Trazando el segmento fijo y con un ángulo de 60 grados trazan una recta completa, seguidamente colocando y moviendo el ángulo de 150 sobre la recta, extienden el otro lado del ángulo buscando que coincida con el otro extremo del segmento fijo, con esa estrategia notan que no se forma el triángulo, por lo que colocan el ángulo de 150 en el otro

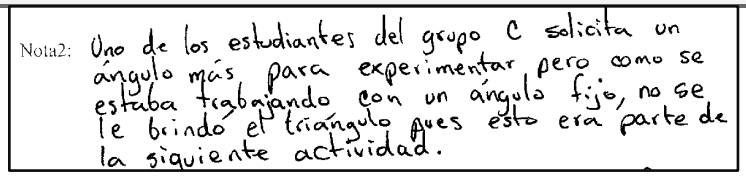
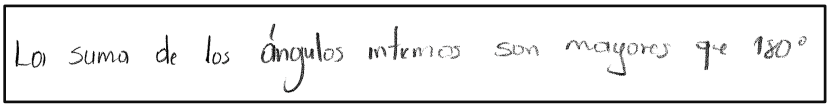
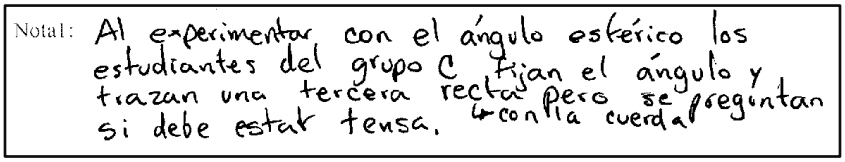
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
la figura 107a)], este, si lo extiende, no llega acá". V-BP1-S3|3:16:18-3:16:24|: "Entonces los ángulos tienen que estar en medio de los dos, para que se forme uno".  Figura 107a. Construcción del equipo B para el caso AAL. Fuente: Fotografía-sesión 3.  Figura 107b. Construcción del equipo B para el caso ALA. Fuente: Fotografía-sesión 3.	**Identifican** que solo en el caso ALA se forma un triángulo. **Prologan** los lados de los ángulos e **identifican** si coinciden o no con el otro lado.	extremo del segmento fijo, prolongan el lado del ángulo que no es fijo y deducen que se forma un único triángulo.
(T7) Después de dar la indicación y escuchar el comentario de AP3 que dice que sería como inducir a la semejanza, V-BPa2-S3|3:23:33-3:23:35|: "A la congruencia de triángulos". El IP dibuja dos triángulos con medidas para hacer el ejemplo. En la DG, ante la pregunta, el V-BP1-S3|3:33:02-3:33:10|: "Se cumple, pero para ciertos casos [IP: ¿Para qué casos no se cumple?], para el caso del último AAA. A diferencia en cuanto al plano, hay infinitos triángulos y en la esfera uno nada más y, por lo que decía el compañero [menciona a CP2], que los ángulos, los tres ángulos se pueden mantener, pero los triángulos pueden hacerse más amplios [hace un triángulo con sus manos y lo amplía (ver figura 108)], como hacerle un zoom, pero ya no, o sea, teniendo solamente esos tres elementos, no implica que el otro triángulo va a ser igual". Figura 108. BP1 muestra la ampliación de un triángulo para el caso AAA. Fuente: Video-sesión 3.	**Asocian** la construcción única de los triángulos con la congruencia. **Reconocen** que, si dos triángulos comparten elementos, como en los casos en los que solo se podía construir un único triángulo, ambos triángulos son congruentes. **Describen** los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno. **Ejemplifican** como criterio de congruencia los caso trabajados (LLL, ALA, LAL).	Asociando la pregunta con los casos trabajados, aceptan que en los casos en los que se podía construir un único triángulo, todos los triángulos que comparten esos elementos fijos, son congruentes.
En sus HT, el BP1 describe los casos en los que se cumple para el plano y para la esfera (ver figura 109). Todos los miembros del equipo presentan la misma tabla resumen; por ejemplo, la tabla de la BPa3 se muestra en la figura 110.	**Notan** que para el caso AAA hay una diferencia entre el plano (se pueden construir infinitos triángulos) y en la esfera (un único triángulo). **Justifican** que en la esfera se puede construir un único triángulo en el caso AAA, porque	Señalando una diferencias en el caso AAA. Reconocen que en el plano se construyen infinitos triángulos semejantes y en la esfera solo uno, dado que no existe el paralelismo.

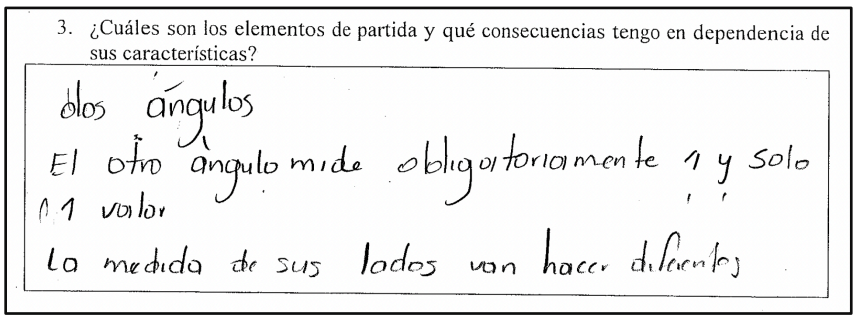
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 109. Respuesta por BP1 de la T7. Fuente: HT.	no hay paralelismo. **Justifican** que en el plano se pueden construir infinitos triángulos por la semejanza.	
 Figura 110. Tabla resumen por BPa3. Fuente: HT.		
Equipo C: Al recordar los elementos geométricos que componen un triángulo, V-CPa1-S3|0:02:02-0:02:05|: "Tres lados, tres ángulos, tres vértices". **Caso 1: Un elemento fijo (seleccionaron: A)** Plano (T1) El equipo C seleccionó un ángulo. Al preguntar sobre lo que podemos decir de los otros elementos dado el elemento que seleccionaron, un ángulo de 60 grados (ver figura 111), el V-CP2-S3|0:15:32-0:15:34|: "Que van a sumar 120", V-CPa1-S3|0:16:04-0:16:06|: "Todos van a ser igual a 60", el IP pregunta si alguno de los otros ángulos puede ser obtuso, el V-CP2-S3|0:16:18-0:16:21|: "No… oh sí, si en el caso fuera 120… No, si el otro mide 100 y el otro puede medir perfectamente 20", V-CPa3-S3|0:16:34-0:16:34|: "Para tener la suma de los 180". En sus HT, la CPa2 explicita algunos casos de los ángulos (ver figura 112).	**Seleccionan** un ángulo de 60 grados. **Establecen** que los otros dos ángulos van a sumar 120 grados. **Exponen** que uno de los otros ángulos puede ser obtuso. **Condicionan** la medida de los ángulos por la suma de los ángulos internos.	Toman un ángulo de 60 grados, con ese ángulo como elementos de partida colocan los lados no fijos en sus lados y establecen propiedades de los otros elementos, por ejemplo, que los otros dos ángulos deben sumar 120 grados. Inicialmente piensa que pueden construir un triángulo equilátero, pero luego mueven los ángulos y

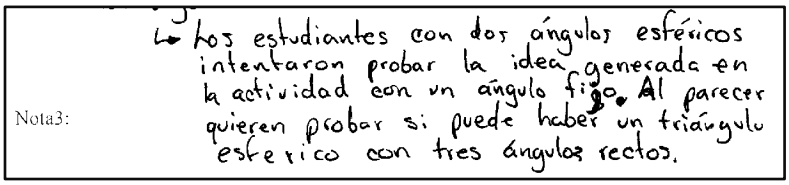
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 111. Construcción del equipo C para un ángulo fijo en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.  Figura 112. CPa2 presenta diferentes caso dado un ángulo fijo. Fuente: HT. Al preguntar si podemos decir algo de los lados, el V-CP2-S3|0:16:56-0:17:22|: "En el caso de los lados, yo sé que uno de los casos, por ejemplo, podría ser el equilátero [construye la figura 113a], podría ser isósceles porque el equilátero es un caso particular del isósceles… entonces podríamos tener un triángulo isósceles o un triángulo escaleno [construye la figura 113b]". El IP pregunta, solo teniendo el ángulo seleccionado, qué puedo decir de los lados que están contiguos. El V-CP2-S3|0:18:06-0:18:17|: "Sí, es que realmente no puedo decir nada de estos dos porque simplemente tengo un ángulo". Se le pregunta si ese ángulo limita de cierta forma a esos lados. El V-CP2-S3|0:18:33-0:18:34|: "El punto de partida siempre sería 60 [CPa3: La abertura]".  Figura 113a. El equipo C construye un triángulo equilátero. Fuente: Fotografía-sesión 3.  Figura 113b. El equipo C construye un triángulo escaleno. Fuente: Fotografía-sesión 3. (T2) En la DE, para responder a la pregunta general en el plano, el V-CP2-S3|0:28:44-0:29:27|: "Solo a partir del ángulo, del ángulo son 120 [APa2: Sí, porque se van a ir moviendo]. En realidad, no serían 120, serían 119, porque el ángulo puede ir variando. Digamos, acá tengo 60; si yo lo muevo a 61, entonces va a ser 59, 62, 58, y va a ir así sucesivamente hasta llegar a 120, 119, sí, sí,119, y que el otro mida 1 grado [está	**Notan** que uno de los otros ángulos puede ser obtuso, recto o agudo. **Establecen** que los lados del ángulo fijo van a mantener la abertura. **Construyen** diferentes casos, un triángulo equilátero y un escaleno. **Establecen** que el triángulo equilátero es un caso particular del triángulo isósceles. **Señalan** que la abertura del ángulo fijo se mantiene. **Prologan** o acortan segmentos. **Modifican** la medida de los ángulos no fijos. **Establecen** una estrategia de construcción geométrica. **Modifican** la medida de los ángulos no fijos, quitando o agregando un	reconocen que uno de los otros ángulos puede ser obtuso. Cambiando la medida de los ángulos y segmentos no fijos muestran la construcción de casos particulares, triángulos equiláteros, isósceles y escalenos. Además, reconocen el triángulo equilátero como un caso particular de triángulo isósceles. Cambiando la medida de los ángulos no fijos, cambiando un grado de uno al otro, distribuyen los 120 grados en los dos ángulos. Señalando que el último caso sería

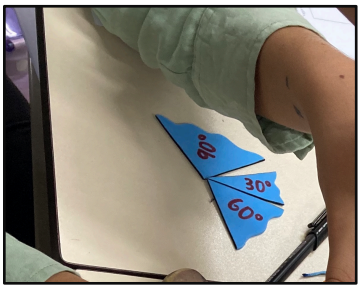
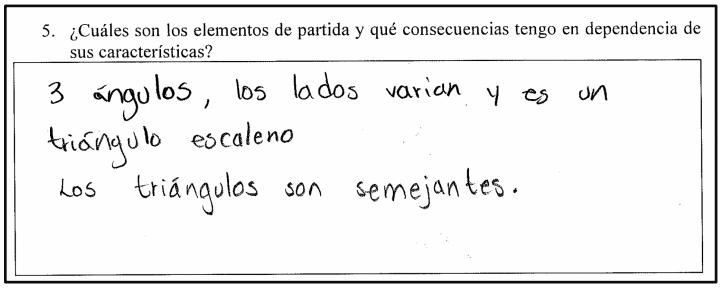
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
variando los otros dos ángulos de forma entera]", V-CPa3-S3|0:29:29-0:29:49|: "Ah, es cierto".	grado de uno al otro. **Establecen** que el caso extremo es 119 y 1 grado.	uno de 119 grados y el otro 1 grado.
El IP, pregunta: "Cuántos tenemos diferentes", el V-CP2-S3|0:29:38-0:29:27|: "119 [IP:¿Solo 119?], claro nosotros considerando solamente un ángulo, pero si consideramos la distancia de los lados, infinitos", V-CPa3-S3|0:30:04-0:30:09|: "Por qué habían cambiado de opinión si cuando iniciamos esta [refiere a CPa1] dijo que eran infinitos", el V-CP2-S3|0:30:09-0:30:43|: "Porque consideramos, estábamos diciendo que solo consideráramos un elemento, si consideramos solo el ángulo y no la distancia de los lados son 119, [CPa3: Por qué], si usted tiene 60, en otro también tiene 60, [CPa1: No, ella está diciendo por qué podrían ser infinitos], porque podrían ser infinitos, porque los lados pueden tener diferentes distancias, van a estar en diferentes ángulos, y si los lados, en el plano como las rectas se expanden [modificación de una generalización euclidiana], yo podría escoger infinitas posiciones", el V-CP2-S3|0:30:49-0:32:05|: "Veamos esto en el plano, son tres rectas, … entonces, yo, por ejemplo, podría tomar estos 60 y después podría cortarlo de esta forma. Este es uno, todo esto; luego puedo ponerlo en 62, 63, 64, 65, 90; y 90 pueden ser todos estos, entonces podrían ser infinitos… En el plano son infinitos considerando lados y ángulos; en el plano, considerando solo ángulo, 119, no 120, si serían 120". La CPa3 cuestiona que el porqué serían 120, el V-CP2-S3|0:32:29-0:33:00|: "Primero 60, 60, 60; luego 59, 60; y así sucesivamente; el básico es de 60, 120; de 60, 119, 1; 118; así hasta 1, 119". En sus HT, la CPa3 fue la única que dejó explícitamente esta cantidad de triángulo según la variación del ángulo (ver figura 114).  Figura 114. CPa3 explicita una cantidad de triángulos según la variación de los ángulos. Fuente: HT.	**Consideran** inicialmente solo la medida de los ángulos. **Establecen** como caso base el triángulo equiángulo. **Modifican** la medida de los ángulos no fijos cambiando 1 ángulo de uno a otro. **Reconocen** que se pueden construir 120 triángulos diferentes. **Consideran** la medida de los lados. **Establecen** que los lados en el plano pueden prolongarse. **Prolongan y acortan** los lados. **Reconocen** que cambiando la media de los lados se pueden construir infinitos triángulos.	Deciden centrarse en la medida de los ángulos, construyen el triángulo equiángulo, lo toman el caso base, luego van cambiando la medida de los ángulos no fijos, quitando y agregando 1 ángulo, esto les permitió establecer que se pueden construir 120 triángulos diferentes. Seguidamente, consideran la medida de los lados, reconocen que los lados se puede prologar todo lo que se quiera, y de ahí deducen que cambiando la medida de los lados se pueden construir infinitos triángulos.
En la DG, después de la opinión de BP1 y AP3, el V-CP2-S3|0:36:10-0:36:45|: "Que si nosotros consideramos solamente el ángulo, podríamos tener finitos triángulos en el plano, porque como es independientemente del ángulo, si ya nosotros solo estamos considerando el ángulo como algo que va a estar variando sin considerar los lados, 120 podrían formarse, pero si ya consideramos que la distancia de los lados podría variar, serían infinitos". El IP dice: "120, contando ángulos como unidades enteras, y si	**Consideran** inicialmente solo la medida de los ángulos. **Modifican** la medida de los ángulos no fijos cambiando 1	Exponiendo su proceso de construcción, por la opinión de los otros equipos reconocen que los ángulos puede cambiar de medida en partes

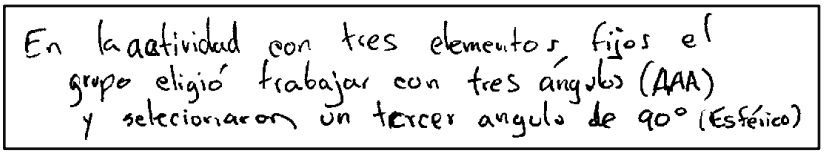
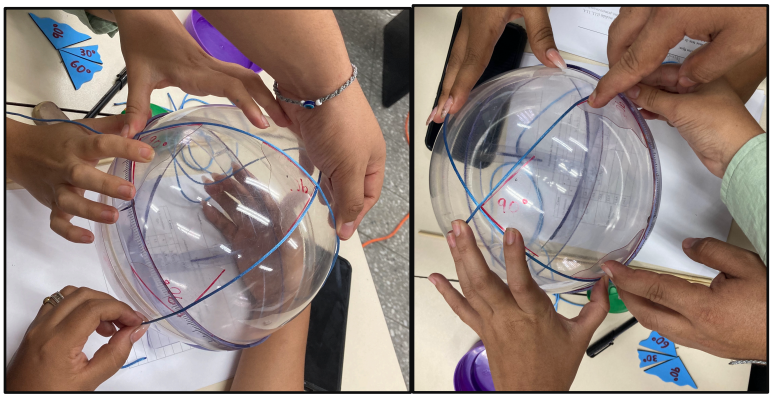
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
pensamos en la idea del AP3", el V-CP2-S3|0:36:51-0:36:52|: "Es cierto, serían infinitos".	ángulo de uno a otro. **Reconocen** que se pueden construir 120 triángulos diferentes. **Prolongan y acortan** los lados. **Reconocen** que cambiando la media de los lados se pueden construir infinitos triángulos. **Reconocen** que los ángulos pueden cambiar de medida en decimales. **Establecen** que se pueden construir infinitos triángulos.	decimales, de ahí deducen que aun solo considerando los ángulos se pueden construir infinitos triángulos.
Esfera En la esfera, el equipo C seleccionó un ángulo recto; como los lados pueden cambiar de medida, los representaron con cuerdas tensas (ver figura 115). (T1) El IP pregunta si se puede decir algo de los otros elementos conociendo el ángulo de partida, el V-CP2-S3|1:02:44-0:03:51|: "Los ángulos van a ser iguales [CPa3: Eso le iba a decir][IP: Cómo así], o sea, no iguales, pero independientemente de la figura que yo tenga está condicionada de que los ángulos que se están formando con la otra, con la tercera recta, es decir, estos dos de acá van a ser iguales independientemente de la longitud de la recta, si yo extiendo esta, esos ángulos van a seguir siendo los mismos [está intentando verificar que si muevo la tercera recta, como si fuera paralela a la posición inicial los dos ángulos que falta van a seguir siendo iguales como en el plano], préstenos otro [pide otro ángulo], otro ángulo de 90", el IP le dice que no puede darle uno más en ese momento, esta solicitud también la registra el investigador-observador en sus notas (ver figura 116). Figura 115. Construcción del equipo C para un ángulo fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.	**Seleccionan** un ángulo recto. **Tensan** cuerdas en los lados del ángulo fijo. **Establecen,** erróneamente, que el triángulo está condicionado por la medida de los ángulos. **Construyen** un triángulo agregando una tercera recta (opuesta al ángulo recto). **Cambian** la posición de la tercera recta como si fuera un paralelo a la posición inicial. **Establecen** erróneamente que los dos ángulos no fijos serán congruentes correspondientes a cuando la tercera recta estaba en la posición inicial.	Colocando el ángulo recto sobre la superficie de la esfera y unas cuerdas tensan para representar los lados del ángulo. Colocan una tercera cuerda para el tercer lado y lo cambian de posición como si fueran paralelos, esto les permitió establecer, erróneamente que los ángulos que se forman en los extremos del tercer lado son congruentes a los que se formaron en los extremos del tercer lado cuando este estaba en la posición inicial.

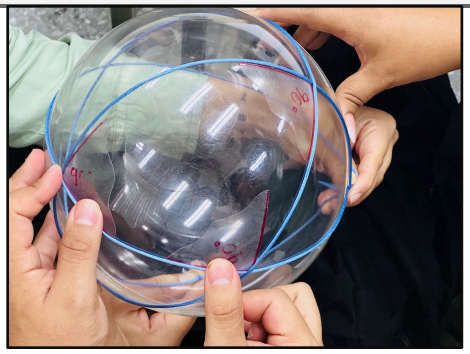
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 116. Nota de investigador-observador sobre la solicitud de otro ángulo. Fuente: NIO.	**Solicitan** un segundo ángulo recto.	
El V-CP2-S3|1:04:06-0:04:24|: "Pero van a ser mayores, van a ser mayores que 90 [refiere a los ángulos restantes], mientras que en el caso del triángulo solo pueden tener un ángulo de 90. Aquí los otros dos; sabemos que la suma de los ángulos [CPa1: Aquí la suma de los ángulos internos de un triángulo no van a ser 180] va a ser mayor que 180". El IP pide más ejemplos de triángulos y les pregunta si sus ángulos internos suman más de 180 grados; el equipo está de acuerdo en que sí, suman más de 180 grados. V-CPa1-S3|1:06:15-1:06:22|: "Los ángulos del triángulo en la esfera no van a tener la misma medida", V-CPa1-S3|1:06:45-1:06:56|: "Yo diría eso, en el triángulo los ángulos no van a sumar la misma medida, en el plano tienen que medir 180, pero acá no", V-CP2-S3|1:07:30-0:07:54|: "Como lo explico, la suma va a ser mayor que 180, sí, porque si ustedes se fijan aquí tenemos 90, se supone que solo debería de haber un ángulo de 90, pero aquí tenemos uno mayor de 90 [tiene un ángulo de 90 grado y un otro obtuso y aun así forman un triángulo en la esfera], y acá tenemos [refiere al tercer ángulo], ya con eso es mayor que 90, ya tenemos que la suma de los ángulos va a ser mayor que 180", en sus HT, la CPa3 explicita esta proposición (ver figura 117). V-CPa1-S3|1:08:40-1:08:54|: "Pero la pregunta aquí es si esta cuerda tiene que estar tensa [CPa3: Obviamente, tiene que estar tensa], la tercera cuerda", esto también lo describe el investigador-observador (ver figura 118).	**Modifican** la medida de los ángulos no fijos. Prolongan y acortan segmentos. **Notan** que formaron un triángulo con un ángulo recto y un obtuso. **Establecen** que en el plano un triángulo solo puede tener un ángulo recto. **Reconocen** que en la esfera la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados. **Reconocen** que las cuerdas deben estar tensan para representar los lados del triángulo.	Cambiando la medida de los ángulos y de los lados logran construir un triángulo que tiene un ángulo recto y un ángulo obtuso, ahí reconocen que la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es mayor que 180 grados, por lo que finalmente establecen la diferencia entre el plano y la esfera.
 Figura 117. CPa3 reconoce que los ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados. Fuente: HT.		
 Figura 118. Nota de investigador-observador sobre la construcción de los lados con cuerdas tensa. Fuente: NIO.		
(T2) En la DG, después de la participación del equipo A y B, la V-CPa1-S3|1:12:50-1:12:51|: "Igual, infinitos", el IP pregunta: "Por qué", V-CP2-S3|1:12:54-1:13:31|: "Porque como nosotros solamente tenemos un ángulo, igual como mencionaba [menciona el nombre de BP1], nosotros también observamos que, por ejemplo, la medida de todos los ángulos internos va a medir más de 180, entonces, al no limitarme	**Notan** que la suma de los ángulos internos de un triángulo en la esfera es mayor a 180 grados.	Exponiendo su proceso de construcción geométrica, establecen que la suma de los ángulos internos de un

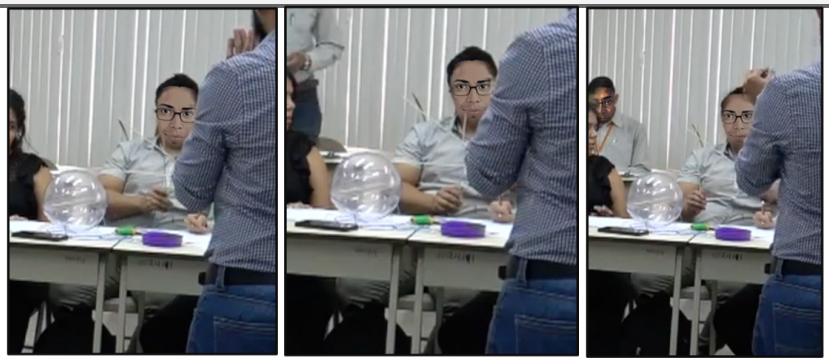
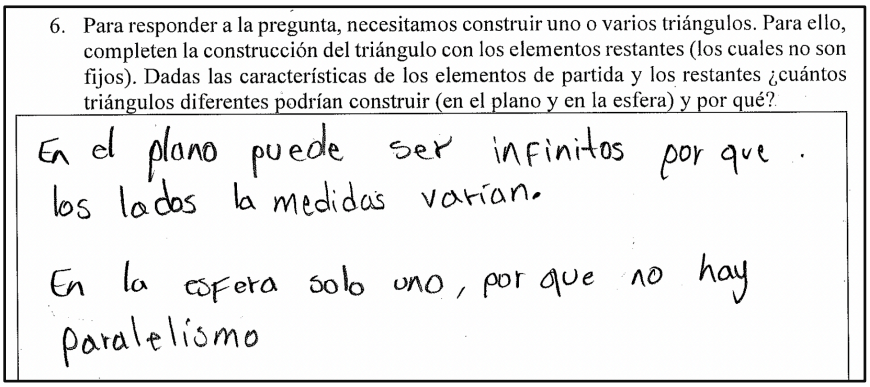
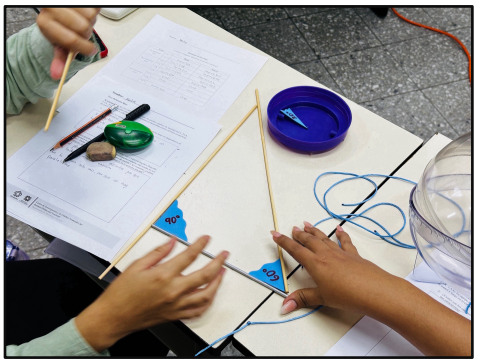
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
a mí la medida de los ángulos internos ni tampoco la distancia, entonces, si consideramos que, por ejemplo, la medida de, considerando decimales, entonces los que se forman a partir de toda figura van a ser infinitos, puedo tener infinita cantidad".	**Establecen** que como los ángulos y los lados no están limitados y que además los ángulos pueden cambiar de medida en decimales, se forman infinitos triángulos.	triángulos esférico es mayor que 180 grados. Además, exponen que como la suma de los ángulos internos no están limitados se forman infinitos triángulos.
Caso 2: Dos elementos fijos (Seleccionaron: AA) **Plano**		
(T3) En la DE, el IP les pregunta, dado esos dos ángulos fijos, qué podemos decir de los otros elementos, V-CP2-S3|1:51:18-1:51:37|: "Que se va a formar un triángulo escaleno, únicamente un triángulo escaleno; el otro va a sumar 30, obligatoriamente va a medir 30 [IP: Qué tipo de triángulo se va a formar], puede ser un triángulo que sea 30, 60, 90". En sus HT, todo el equipo especifica esta idea, por ejemplo, en la figura 119 se muestra la respuesta del CP2. El IP pregunta si, dados esos dos ángulos, se puede decir algo de los lados, V-CP2-S3|1:51:49-1:51:51|: "Que van a ser todos diferentes".	**Seleccionan** dos ángulos. **Exponen** los elementos de partida. **Establecen** que el tercer ángulo va a estar fijo. **Establecen** que los tres lados del triángulo serán diferentes. **Reconocen** que formarán un triángulo escaleno.	Tomando los dos ángulos seleccionados notan que el tercer ángulo debe ser fijo, dado que los tres suman 180 grados. Además, que dado que los tres ángulos son diferentes pueden establecer que los lados también serán diferentes.
 Figura 119. Respuesta por CP2 de la T3. Fuente: HT.		
(T4) El IP: "¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir?", la V-CPa1-S3|1:52:00-1:52:04|: "Infinitos, por los lados". V-CPa1-S3|1:52:25-1:52:28|: "Con dos lados [CPa1: Dados dos lados], ve dos ángulos", V-CPa3-S3|1:52:32-1:52:37|: "¿Por qué, por qué [menciona el nombre de CP2]?". CPa3 lee la T3, V-CPa1-S3|1:52:47-1:52:55|: "Aquí dos ángulos, el otro ángulo mide 30", V-CP2-S3|1:52:57-1:53:21|: "Obligatoriamente una medida, el otro ángulo mide obligatoriamente una medida [CPa3: Una medida obviamente], el otro ángulo mide obligatoriamente uno y solo un valor, porque acá se forma uno de 90, 60, 30; como los dos ángulos, el otro obligatoriamente va a tener esa medida", V-CPa1-S3|1:53:43-1:53:28|: "Y de los lados [menciona a CP2]", V-CP2-S3|1:53:58-1:54:04|: "Infinitos, va a ser un triángulo escaleno siempre, las medidas de sus lados van a ser diferentes siempre", V-CP2-S3|1:54:12-1:54:20|: "En el caso de que todos sean diferentes va a ser un triángulo escaleno, pero si dos son iguales	**Reconocen** y **muestran** que pueden formar infinitos triángulos. **Establecen** que el tercer ángulo también es fijo y mide 30 grados. **Forman** triángulos de 90, 60 y 30 grados, triángulos rectángulos escalenos. **Prolongan** y **acortan** los lados. **Reconocen** y **muestran** que	Construyendo un triángulo rectángulo escaleno, establecen que sus ángulos son fijos, pero que cambiando la medida de los lados pueden construir infinitos triángulos.

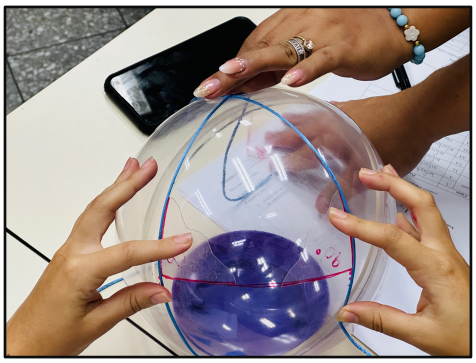
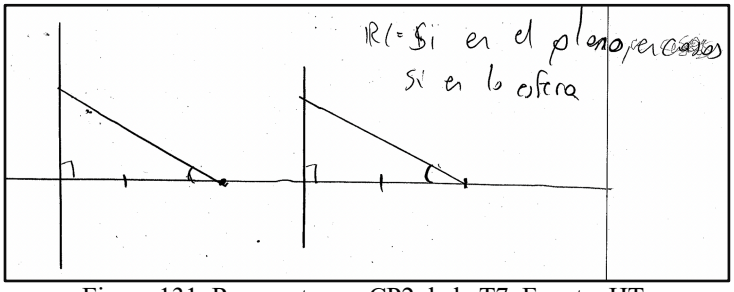
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
siempre va a ser un triángulo isósceles", V-CPa1-S3|1:54:47-1:54:50|: "En el plano son infinitos, por qué, ¿por qué son infinitos en el plano?", V-CP2-S3|1:54:49-1:54:50|: "Por los lados", V-CPa1-S3|1:54:54-1:54:50|: "Porque los lados se cambian de medida". **Esfera** (T4) Hacen la construcción en la esfera (ver figura 120). V-CPa1-S3|1:57:34-1:57:41|: "Se formarán infinitos, igual por los lados [CP2: Sí, por la medida], por la medida de sus lados", V-CPa1-S3|1:58:08-1:58:11|: "Es que cuando está acá [menciona a CP2] no me va a tensar", V-CP2-S3|1:58:57-1:59:19|: "Van a medir más de 180 [CPa3: Obviamente], [CPa1: Ya lo habíamos dicho], no, porque habíamos dicho un triángulo de 90 [CPa1: Ajá, poner tres ángulos de 90], por lo menos ya sabemos que no van a haber triángulos equiláteros, isósceles sí puede haber [CPa1: Pero serían infinitos], ajá". El IP: "¿A qué conclusión llegaron?", la V-CPa3-S3|1:59:38-1:59:39|: "Infinitos también". V-CP2-S3|1:59:46-1:59:56|: "No puede haber triángulos equiángulos [CPa3: ¿Por qué?], o será que sí, porque tendría que ser una medida muy específica [CPa3: Usted sale con unas ideas]". V-CPa3-S3|2:01:22-2:01:25|: "Ahora nos van a dar tres puntos fijos", V-CPa1-S3|2:01:28-2:01:31|: "¿Qué pedimos, un lado u otro ángulo?", V-CPa3-S3|2:01:31-2:01:33|: "Obviamente otro ángulo y van a ser infinitos siempre". Dada la solicitud que hicieron en el caso anterior de un ángulo recto y al seleccionar el segundo ángulo también recto, el investigador-observador, menciona que están tratando de probar la existencia de un triángulo trirectángulo (ver figura 121). Figura 120. Construcción del equipo C para el caso AA. Fuente: Fotografía-sesión 3.  Figura 121. Nota de investigador-observador sobre la construcción del triángulo trirectángulo. Fuente: NIO.	pueden formar infinitos triángulos. **Justifican** la infinitud de los triángulos por la medida de los lados. **Seleccionan** dos ángulos rectos. **Sobreponen** los ángulos en la superficie de la esfera. **Tensan** cuerdas para representar los lados del triángulos. **Construyen** un triángulo birrectángulo. **Establecen** que la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados. **Prolongan** el lado que está entre los ángulos fijos. **Reconocen** y **muestran** que se pueden formar infinitos triángulos. **Deciden** que para el tercer caso van a seleccionar tres ángulos. **Establecen**, erróneamente, que cuando tengan tres ángulos también van a construir infinitos triángulos. **Prueban** construir un triángulo trirectángulo.	Construyendo un triángulo birrectángulo logran establecer algunas proposiciones: la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es mayor que 180 grados, no habrán triángulos equiláteros (erróneamente). Discutiendo sobre el siguiente caso, deciden seleccionar tres ángulos, porque quieren comprobar si existen triángulos trirectángulo.

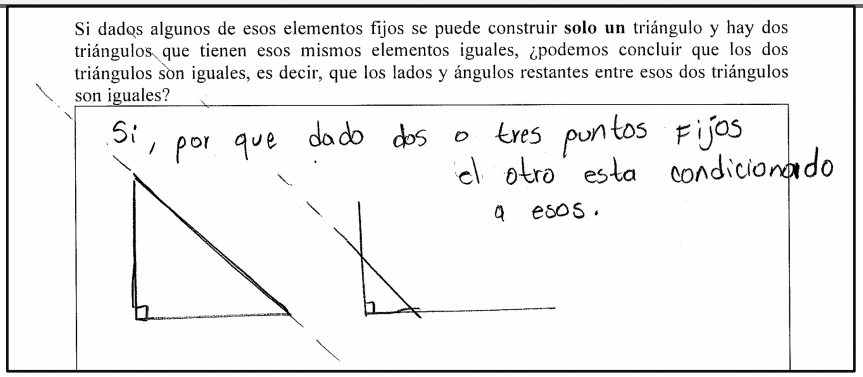
Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
En la DG, V-CP2-S3|2:01:50-2:02:08|: "Infinitos, porque como los segmentos pueden ir variando, entonces eso me va a dar siempre infinitos triángulos, independientemente de los dos ángulos fijos y de igual forma en el plano". El IP pregunta si se puede deducir la medida del tercer ángulo, V-CP2-S3|2:02:11-2:02:08|: "En el plano, sí; y en el caso de la esfera, no".	**Reconocen** y **muestran** que se pueden formar infinitos triángulos. **Establecen** que, en el plano, dos ángulos fijan el tercer ángulo, pero en la esfera no.	Exponiendo que se pueden construir infinitos triángulos por el cambio de medida de los lados, logran establecer una diferencia entre geometrías.
Caso 3: Tres elementos fijos (seleccionaron AAA) **Plano** (T5) La V-CPa3-S3|2:36:36-2:36:39|: "Entonces, ¿qué podemos decir de los ángulos?". V-CPa1-S3|2:36:41-2:36:31|: "Tres ángulos, tomamos los tres ángulos en el plano, no se puede decir nada, solo de los lados, [CPa3: Sí]". V-CP2-S3|2:36:53-2:36:56|: "De los lados podemos decir que va a ser un triángulo escaleno". V-CPa1-S3|2:37:40-2:37:42|: "Y cuántos vamos a tener en el plano, [CPa3: Infinitos], por los lados", el V-CP2-S3|2:36:53-2:36:56|: "Por los lados, por lo que hablábamos ayer, a diferencia de por los lados que siempre va a ser el mismo [refiere a si tuviera fijos los lados]". El IP pregunta: "¿Qué ángulo seleccionaron al final?", V-CPa1-S3|2:40:10-2:40:17|: "El de 30, [IP: Por qué], [CP2: Porque era la obligación formar un triángulo]". Colocan los ángulos formando uno de 180 grados (ver figura 122).  Figura 122. Justificación del equipo C para la selección de ángulos planos. Fuente: Fotografía-sesión 3.	**Seleccionan** tres ángulos. **Seleccionan** el ángulo de 30, porque era el que necesitaban para formar 180 grados. **Notan** que el triángulo que van a formar es escaleno. **Reconocen** y **muestran** que se pueden formar infinitos triángulos. **Justifican** la infinitud de los triángulo por la medida de los lados. **Suman** los ángulos para formar uno de 180 grados.	Desde la selección del tercer ángulo, piensan que debe ser un ángulo con el que puedan sumar 180 grados. Juntan los ángulos para mostrar que suman 180 grados. Construyendo triángulos establecen que el triángulo es escaleno, pero como los lados pueden cambiar de medida se pueden formar infinitos triángulos.
(T6) El IP: "¿En el plano, cuántos diferentes?", el V-CP2-S3|2:42:10-2:42:11|: "Infinitos, es que no se puede formar uno con los ángulos fijos". En sus HT, la CPa1 presenta las características de los triángulos formados y menciona que serán semejantes (ver figura 123).  5. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características? 3 ángulos, los lados varían y es un triángulo escaleno Los triángulos son semejantes. Figura 123. Respuesta por CPa1 de la T5. Fuente: HT.	**Reconocen** y **muestran** que se pueden formar infinitos triángulos. **Relacionan** los triángulos construidos y **reconocen** que son triángulos semejantes.	Describiendo que pueden construir infinitos triángulos, dado que pueden tener infinitos triángulos semejantes.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Esfera (T5 y T6) Seleccionaron tres ángulos rectos, buscando la construcción de un triángulo trirectángulo (ver figura 124). IP: "Tienen tres ángulos iguales, ¿cuántos triángulos diferentes pueden construir?", el V-CP2-S3|2:40:39-2:40:40|: "Uno". V-CP2-S3|2:41:00-2:41:40|: "Pero podríamos decir que los ángulos tienen que ser un triángulo isósceles en una circunferencia, el tercero". El IP recomienda usar la regla como una recta esférica y colocar dos ángulos y luego usar las dos cuerdas para los otros dos lados. Después de hacer la construcción (ver figura 125), V-CP2-S3|2:43:00-2:43:28|: "Ohhh, uno, infinitos, iguales, pero con todas las medidas de 90, [CPa1: Solo hay que mover los lados], sí, solo hay que mover los lados [intentan mover los lados y mantener los ángulos como el plano]".	**Seleccionan** tres ángulos rectos. **Colocan** la regla esférica como una recta. **Tensan** cuerdas para los otros dos lados. **Sobreponen** los ángulos en la superficie de la esfera. **Procuran** cambiar la medida de los lados.	Construyen el triángulo en la esfera usando la regla y cuerdas tensas para representar los lados. Aplican la misma estrategia que en el plano, intentan cambiar la medida de los lados.
 Figura 124. Nota de investigador-observador sobre la selección de tres ángulos rectos. Fuente: NIO.  Figura 125. Construcción del equipo C para el caso AAA. Fuente: Fotografía-sesión 3.		
V-CPa1-S3|2:43:31-2:43:17|: "Pero moviendo los lados se van a mover los ángulos, [CP2: No, porque si yo los voy deslizando]", el V-CP2-S3|2:43:37-2:43:41|: "Ah, pero mira, la otra cambia, la fija cambia, un triángulo". V-CP2-S3|2:43:46-2:44:02|: "Tenemos esto acá, si mueve, por ejemplo, si yo muevo, va cambiando este [en la figura 126 se ve como forma un triángulo con dos ángulos rectos, pero el tercero se hace obtuso]". El IP: "Este ángulo de acá sigue midiendo 90 grados", la V-CPa3-S3|2:44:09-2:44:15|: "No [CP2: No, cambia], [CPa1: Entonces solo sería uno]", V-CP2-S3|2:44:19-2:44:21|: "Entonces sería un triángulo equiángulo".	**Observan** que al cambiar la medida de los lados también cambia la medida de los ángulos. **Establecen** que los ángulos fijos, fijan también los lados. **Reconocen y muestran** que solo se pueden construir un triángulo. **Reconocen** que el triángulo que construyeron es	Intentando cambiar la medida de los lados, observan que la medida de los lados cambia la medida de los ángulos, de hecho, construyen un triángulo con dos ángulos rectos y uno obtuso. De ahí, deducen que como los tres ángulos son fijos solos se pueden construir un único triángulo, un triángulo trirecctángulo.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 126. Deducción del triángulo único dado tres ángulos fijos en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.	equiángulo con tres ángulos de 90 grados.	
La V-CPa3-S3|2:44:37-2:44:40|: "Nosotros tenemos condicionados los tres", V-CPa3-S3|2:45:15-2:45:19|: "Con esos tres ángulos, solo se forma uno [CP2: Ajá, uno]", V-CP2-S3|2:45:21-2:45:44|: "Sí, porque si usted se fija, esto cambia. Mueva este para acá, ahí, y ahí sí se formaría uno nada más y volvería a tener, que sería desde el polo a la circunferencia, a la circunferencia mayor", V-CP2-S3|2:45:56-2:46:00|: "Si usted se fija, tenemos un diámetro; este va a llegar hasta el polo prácticamente", el IP: "¿Por qué llega al polo?", V-CP2-S3|2:46:14-2:46:45|: "Supongamos que llega al polo, [IP: ¿por qué?], [CPa1: Porque es en ángulo recto], …, ajá. Entonces solo formaría uno".	**Señalan** sus elementos de partida. **Reconocen** y **muestran** que solo se pueden construir un triángulo. **Muestran** como cambiando los lados también cambian los ángulos. **Reconocen** que los vértices son los polos del lado opuesto por ser tres ángulos rectos y que los lados son radios de circunferencias máximas.	Exponen la construcción que hicieron cambiando la medida de los lados notando que cambian los ángulos, de ahí deducen que solo se puede construir un triángulo. Además, que los vértices son los polos de los lados opuestos y que los lados son radios de círculos máximas, es decir que miden ¼ de circunferencia máxima.
En la DG, el IP pregunta primero por el plano, V-CP2-S3|2:49:20-2:49:42|: "Infinitos, [IP: En el plano dicen que si tienen tres ángulos hay infinitos triángulos, por qué], porque lo que va a producir es que todos los triángulos, ciertamente van a tener la misma medida los ángulos, pero eso no determina cómo van a ser los lados; los lados pueden seguir cambiando. La medida del ángulo es independientemente de la longitud de los segmentos". El IP: "¿Cómo serían esos triángulos infinitos?, ¿tienen alguna característica particular o no?", el V-CP2-S3|2:49:46-2:49:53|: "Eh, solamente la que van a ser escalenos, todas las medidas de sus lados van a ser diferentes", IP: "Tendrán alguna característica que relacione todos esos triángulos", CP2 toma los palillos y, manteniendo un ángulo con sus dos lados, mueve el tercer lado manteniendo los otros dos ángulos (ver figura 127). Entonces, APa1 menciona que son triángulos semejantes, el V-CP2-S3|2:50:15-2:50:16|: "Ah, sí". El IP pregunta de qué relación podemos deducir esos triángulos y APa1 menciona que de las paralelas. El IP pregunta qué pasó en la esfera, V-CP2-S3|2:50:49-2:50:53|: "En la esfera, luego solo se forma uno".	**Reconocen** y **muestran** que en el plano se pueden construir infinitos triángulos. **Establecen** que la medida de los lados es independiente de la medida de los ángulos. **Reconocen** que se forman infinitos triángulos escalenos. **Muestran** infinitos triángulos con sus tres ángulos iguales.	Exponiendo que en el plano, teniendo los tres ángulos iguales se pueden construir infinitos triángulos, muestran con palillos esos triángulos, reconocen que esos triángulos son escalenos y semejantes; además, que son semejantes por el paralelismo.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 127. CP2 muestra infinitos triángulos semejantes que mantienen sus ángulos en el plano. Fuente: Video-sesión 3.	**Reconocen** que son triángulos semejantes. **Establecen** que los triángulos semejantes son consecuencias del paralelismo.	
En sus HT, la CPa1 describe que la diferencia del plano y la esfera, en este caso, es consecuencia del paralelismo, ya que reconoce que en la esfera no hay paralelismo (ver figura 128).  6. Para responder a la pregunta, necesitamos construir uno o varios triángulos. Para ello, completen la construcción del triángulo con los elementos restantes (los cuales no son fijos). Dadas las características de los elementos de partida y los restantes ¿cuántos triángulos diferentes podrían construir (en el plano y en la esfera) y por qué? En el plano puede ser infinitos porque los lados la medidas varían. En la esfera solo uno, porque no hay paralelismo Figura 128. Respuesta por CPa1 de la T6. Fuente: HT.	**Exponen** una diferencia entre el plano y la esfera. **Justifican** la diferencia por la existencia o no del paralelismo.	Describiendo que en este caso hay una diferencia entre el plano y la esfera, justifican esta diferencia al paralelismo que existe en el plano y no en la esfera.
Caso extra: Tres elementos fijos (LAA) **Plano** (T5) V-CPa1-S3|3:16:35-3:16:36|: "Dos ángulos y un lado", V-CPa1-S3|3:16:55-3:16:59|: "Estos van a ser los fijos, estos tres", V-CPa1-S3|3:17:03-3:17:13|: "Pero estos pueden variar… [APa3: Ok, no, porque no estaría en 90]", V-CP2-S3|3:17:22-3:17:27|: "Hágalos así, [CPa1: El que, este], sí, fíjese si sigue de 90". Hicieron la construcción que aparece en la figura 129. 	**Aceptan** trabajar el caso LAA. **Exponen** los elementos de partida. **Notan** que esos elementos fijan a los elementos restantes. **Reconocen** que su triángulo es rectángulo. **Muestran** y **deducen** que solo se puede construir un triángulo.	Construyendo un triángulo con los elementos fijos. Describiendo la construcción que hicieron, observan que el ángulo restante es de 30 grados, por lo que tipifican el triángulo como triángulo rectángulo. Finalmente, deducen que ese triángulo es único.

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
Figura 129. Construcción del equipo C para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3. **Esfera** (T5 y T6) V-CPa1-S3|3:19:31-3:19:44|: "Hay que trazarlo con esta [CPa3: Maje no], sí, con este podemos [el IP sugiere usar la cuerda y hacer línea punteada]". Trazaron la línea usando la cuerda tensa, V-CP2-S3|3:20:40-3:21:09|: "Agarre la punta [CPa1: Ya la tengo], estírelo [toman dos cuerdas grandes y colocan en los lados no fijos (ver figura 130)], [CPa3: Ya tengo las dos puntas], ajá, ¿puede variar? No, se deforma, entonces, uno". V-CP2-S3|3:21:12-3:21:23|: "Pero aquí es de 90 otra vez [se pregunta por la medida del tercer ángulo], [CPa3: No sé, confírmelo], tendría que, matemática".	**Establecen** una estrategia de construcción geométrica. **Trazan** el segmento fijo. **Colocan** los dos ángulos rectos en los extremos del segmento fijo. **Tensan** cuerdas para representar los lados no fijos. **Procuran** cambiar la medida de los elementos no fijos. **Notan** que esos elementos fijan a los demás. **Muestran** y **deducen** que solo se puede construir un triángulo.	Reconociendo los elementos de partida. Primero trazan el segmento fijo, luego posicionan los ángulos en los extremos. Colocando cuerdas tensas como los lados no fijos, intentan cambiar la medida de los lados no fijos, pero notan que no se puede, de ahí deducen que con ese caso solo se puede construir un triángulo.
 Figura 130. Construcción del equipo c para el caso LAA en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.		
(T7) Después de dar la indicación, y escuchar el comentario de AP3 que dice que sería como inducir a la semejanza, y que el IP dibuja dos triángulos con medidas para plantear la pregunta para un caso en particular, V-CP2-S3|3:24:53-3:24:54|: "Congruencia". En sus HT, el CP2 menciona que sí para los casos [refiere a los casos en que solo se podía construir un único triángulo], tanto en el plano como en la esfera, pero hace el diagrama para el caso ALA (ver figura 131). En cambio, CPa1 justifica que sí, porque los elementos fijos condicionan a los otros. Además, presenta un diagrama de dos triángulos que comparten ángulos, pero no lados, consecuencia del paralelismo que mencionó en las preguntas anteriores (ver figura 132).	**Reconocen** que, si dos triángulos comparten elementos, como en los casos en los que solo se podía construir un único triángulo, ambos triángulos son congruentes. **Ejemplifican** como criterio de congruencia los caso trabajados (ALA). **Establecen** que los elementos fijos condicionan a los otros elementos.	Reconociendo que los caso en los que solo se puede construir un triángulo son los criterios de congruencia, ya que esos elementos condicionan a los demás. Presentando ejemplos y contraejemplos de esos criterios.
 Figura 131. Respuesta por CP2 de la T7. Fuente: HT.		

Nivel de acción		
Tareas de problematización	***¿Qué hace?***	***¿Cómo lo hace?***
 Figura 132. Respuesta por CPa1 de la T7. Fuente: HT. En la DG, después de la presentación del equipo B, el V-CP2-S3|3:34:16-3:34:54|: "Igual que [menciona a BP1], en el plano vimos lo de los ángulos, pero en la esfera sí [IP: En la esfera vieron los cuatro casos], sí". Todos los miembros del equipo presentan la misma tabla resumen; por ejemplo, en la figura 133, se muestra la tabla de CPa3. **Resumen de los casos** ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir? | Casos | | Plano | Esfera | |---|---|---|---| | Un elemento fijo | L | infinitos | infinitos | | | A | infinitos | infinitos | | Dos elementos fijos | LL | infinitos | infinitos | | | LA | infinitos | infinitos | | | AA | infinitos | infinitos | | Tres elementos fijos | LLL | Uno | Uno | | | LLA | Uno | Uno | | | LAA | Uno | Uno | | | AAA | infinitos | Uno | Figura 133. Tabla resumen por CPa3. Fuente: HT.	**Describen** los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno. **Notan** que para el caso AAA hay una diferencia entre el plano (se pueden construir infinitos triángulos) y en la esfera (un único triángulo).	Señalando una diferencias en el caso AAA. Reconocen que en el plano se construyen infinitos triángulos semejantes y en la esfera solo uno.

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace.*
Caso 1: Un elemento fijo (seleccionaron: L)
Plano
A-B- Seleccionan un elemento de un triángulo [A-lado, B-lado]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (si el ángulo de un extremo es obtuso el ángulo del otro extremo puede ser recto o agudo; si el ángulo de un extremo es agudo el ángulo del otro extremo puede ser agudo, recto u obtuso; si el ángulo de un extremo es recto los otros dos son agudos; ninguno de los ángulos de los extremos puede ser llano); establecen una estrategia de construcción; sobreponen los palillos no fijos; prolongan y acortan la medida de los segmentos no fijos; nombran los ángulos A, B y C; abren y cierran la abertura de los ángulos formando diferentes triángulos; limitan la abertura de los ángulos (puede ser casi llano); establecen, erróneamente, que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo; muestran infinitos triángulos obtusángulos y acutángulos; establecen, erróneamente, que solo se forma un triángulo

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
rectángulo; reconocen que la abertura de los ángulos puede estar en grados enteros y decimales; exponen que no se pueden contar los diferentes triángulos que se pueden formar; clasifican los triángulos formados en acutángulos, rectángulos y obtusángulos; construyen un triángulo equilátero, para reconocer que en ese caso (un segmento fijo en el plano) se pueden construir infinitos triángulos. C- Seleccionan un elemento de un triángulo [C- ángulo de 60 grados]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los otros dos ángulos van a sumar 120 grados; uno de los otros ángulos puede ser obtuso, recto o agudo; los lados del ángulo fijo mantienen la abertura); establecen una estrategia de construcción geométrica; condicionan la medida de los ángulos por la suma de los ángulos internos; construyen diferentes casos, un triángulo equilátero y un escaleno; establecen que el triángulo equilátero es un caso particular del triángulo isósceles; consideran inicialmente solo la medida de los ángulos; modifican la medida de los ángulos no fijos, quitando o agregando un grado de uno al otro; establecen como caso base el triángulo equiángulo; establecen un caso extremo, el triángulo en el que los dos ángulos no fijos miden 119 y 1 grado; reconocen que se pueden construir 120 triángulos diferentes; consideran la medida de los lados; prolongan y acortan los lados; reconocen que cambiando la media de los lados se pueden construir infinitos triángulos; reconocen que pueden cambiar la medida de los ángulos en decimales; para reconocer que en ese caso (un ángulo fijo en el plano) se pueden construir infinitos triángulos. A-B- Seleccionan un elemento de un triángulo [A-lado, B-lado]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (si el ángulo de un extremo es obtuso el ángulo del otro extremo puede ser recto o agudo; si el ángulo de un extremo es agudo el ángulo del otro extremo puede ser agudo, recto u obtuso; si el ángulo de un extremo es recto los otros dos son agudos; ninguno de los ángulos de los extremos puede ser llano); sobreponen los palillos no fijos; prolongan y acortan la medida de los segmentos no fijos; nombran los ángulos A, B y C; abren y cierran la abertura de los ángulos formando diferentes triángulos; limitan la abertura de los ángulos (puede ser casi llano); establecen, erróneamente, que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo; muestran infinitos triángulos obtusángulos y acutángulos; establecen, erróneamente, que solo se forma un triángulo rectángulo; reconocen que la abertura de los ángulos puede estar en grados enteros y decimales; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento fijo en el plano). C- Seleccionan un elemento de un triángulo [C- ángulo de 60 grados]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los otros dos ángulos van a sumar 120 grados, uno de los otros ángulos puede ser obtuso, recto o agudo, los lados del ángulo fijo mantienen la abertura); condicionan la medida de los ángulos por la suma de los ángulos internos; construyen diferentes casos, un triángulo equilátero y un escaleno; establecen que el triángulo equilátero es un caso particular del triángulo isósceles; consideran inicialmente solo la medida de los ángulos; modifican la medida de los ángulos no fijos, quitando o agregando un grado de uno al otro; establecen como caso base el triángulo equiángulo; establecen un caso extremo, el triángulo en el que los dos ángulos no fijos miden 119 y 1 grado; reconocen que se pueden construir 120 triángulos diferentes; consideran la medida de los lados; prolongan y acortan los lados; reconocen que cambiando la media de los lados se pueden construir infinitos triángulos; reconocen que pueden cambiar la medida de los ángulos en decimales; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un ángulo fijo en el plano).
Esfera
A-Seleccionan un elemento de un triángulo [A-lado]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los lados de un triángulos esférico son geodésicas; el ángulo en uno de sus extremos puede ser agudo, recto u obtuso, ocurre lo mismo que el plano); establecen una estrategia de construcción; trazan el segmento fijo; nombran sus extremos como punto A y B; construyen un segmento

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
perpendicular al segmento fijo en el punto A; fijan el ángulo recto en A; prolongan y acortan la medida de los lados no fijos; construyen dos casos; establecen, erróneamente, que los otros dos ángulos van a sumar 90 grados; trasladan el ángulo recto en la circunferencia perpendicular al segmento fijo; deducen que bajo esas condiciones se pueden construir infinitos triángulos; establecen que, si fijando el ángulo A se construyen infinitos triángulos cambiando su medida también habrá infinitos y no necesitan probarlo; para reconocer que en ese caso (un segmento fijo en la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. B- Seleccionan un elemento de un triángulo [B-lado]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los lados de un triángulos esférico son geodésicas; el ángulo en uno de sus extremos puede ser agudo, recto u obtuso, ocurre lo mismo que el plano); establecen una estrategia de construcción; trazan el segmento fijo; cambian la abertura de un ángulo, prolongan y acortan la medida de los lados no fijos, establecen, erróneamente, que pueden ser triángulos finitos porque las rectas son finitas; trazan tres rectas esféricas; reconocen que se forman dos triángulos opuestos; establecen que los ángulos también están limitados, pero no están seguros hasta donde; trazan dos perpendiculares en los extremos del segmento fijo; exponen que esas perpendiculares se intersecan en el polo del segmento fijo [teoría de la polaridad]; para reconocer que en ese caso (un segmento fijo en la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. C- Seleccionan un elemento de un triángulo [C-ángulo recto]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (establecen, erróneamente, que el triángulo está condicionado por la medida de los ángulos internos [180 grados]); establecen una estrategia de construcción geométrica; tensan cuerdas en los lados del ángulo fijo; construyen un triángulo agregando una tercera recta (opuesta al ángulo recto); cambian la posición de la tercera recta como si fuera un paralelo a la posición inicial; establecen, erróneamente, que los dos ángulos no fijos serán congruentes correspondientemente a cuando la tercera recta estaba en la posición inicial; modifican la medida de los ángulos no fijos; prolongan y acortan los lados; observan que formaron un triángulo con un ángulo recto y un obtuso; reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados; establecen que los ángulos y los lados no están limitados y que los ángulos pueden cambiar de medida en decimales; para reconocer que en ese caso (un ángulo fijo en la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. A-Seleccionan un elemento de un triángulo [A-lado]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los lados de un triángulos esférico son geodésicas; el ángulo en uno de sus extremos puede ser agudo, recto u obtuso, ocurre lo mismo que el plano); trazan el segmento esférico fijo; nombran sus extremos como punto A y B; construyen un segmento perpendicular al segmento fijo en el punto A; fijan el ángulo recto en A; prolongan y acortan la medida de los lados no fijos; construyen dos casos, para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento fijo en la esfera): [A - el segmento fijo mide un cuarto de circunferencia máxima y el punto B sería el polo de la perpendicular al segmento fijo (teoría de la polaridad)]. B- Seleccionan un elemento de un triángulo [B-lado]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los lados de un triángulos esférico son geodésicas; el ángulo en uno de sus extremos puede ser agudo, recto u obtuso, ocurre lo mismo que el plano); trazan el segmento esférico fijo; cambian la abertura de un ángulo, prolongan y acortan la medida de los lados no fijos, establecen, erróneamente, que pueden ser triángulos finitos porque las rectas son finitas; trazan tres rectas esféricas; reconocen que se forman dos triángulos opuestos; establecen que los ángulos también están limitados, pero no están seguros hasta donde; trazan dos perpendiculares en los extremos del segmento fijo; exponen que esas perpendiculares se intersecan en el polo del segmento fijo [teoría de la polaridad]; para establecer y condicionar una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento fijo en la esfera): [B- cambian la medida de los ángulos y construyen como ejemplo un triángulo birrectángulo].

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
C- Seleccionan un elemento de un triángulo [C-ángulo recto]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (establecen, erróneamente, que el triángulo está condicionado por la medida de los ángulos internos [180 grados]); tensan cuerdas en los lados del ángulo fijo; construyen un triángulo agregando una tercera recta (opuesta al ángulo recto); cambian la posición de la tercera recta como si fuera un paralelo a la posición inicial; establecen, erróneamente, que los dos ángulos no fijos serán congruentes correspondientemente a cuando la tercera recta estaba en la posición inicial; modifican la medida de los ángulos no fijos; prolongan y acortan los lados; observan que formaron un triángulo con un ángulo recto y un obtuso; reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados; establecen que los ángulos y los lados no están limitados y que los ángulos pueden cambiar de medida en decimales; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un ángulo fijo en la esfera). B- Exponen que los ángulos internos de un triángulo en el plano suman 180 grados; cuestionan la suma de los ángulos internos de un triángulo, trazan el segmento esférico fijo; establecen que los ángulos también están limitados, pero no están seguros hasta donde; trazan dos perpendiculares en los extremos del segmento fijo; exponen que esas perpendiculares se intersecan en el polo del segmento fijo [teoría de la polaridad]; señalan que han construido un triángulo birrectángulo, para reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados. C- Solicitan un segundo ángulo recto (pero se negó su solicitud); modifican la medida de los ángulos no fijos; prolongan y acortan los lados; observan que formaron un triángulo con un ángulo recto y un obtuso; exponen que en el plano un triángulo solo puede tener un ángulo recto; para reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados**.**
Caso 2: Dos elementos fijos (seleccionaron: LL)
Plano
A-Seleccionan dos elemento de un triángulo (lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo entre los dos lados fijos y el tercer lado pueden cambiar de medida); modifican la abertura del ángulo entre los lados fijos; condicionan el ángulo entre lo lados fijos (puede cambiar de medida, pero debe estar entre 0 y 180 grados); prolongan y acortan el tercer lado; condicionan la prolongación del tercer lado del triángulo; establecen que el tercer lado no puede ser mayor que la suma de los dos fijos; mantienen la forma triangular condicionando el ángulo entre los lados fijos y el tercer lado; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (dos segmentos fijos en el plano). B- Seleccionan dos elemento de un triángulo (lado y ángulo recto); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo del otro extremo no puede ser recto ni obtuso, los otros dos ángulos son complementarios); modifican la abertura del ángulo que está al otro extremo del segmento fijo; prolonga y acortan los segmentos no fijos; establecen que la hipotenusa debe ser siempre mayor que el segmento fijo (está de cateto); condicionan la medida de segmentos y ángulos; construyen triángulos rectángulos isósceles; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento y un ángulo fijos en el plano). C-Seleccionan dos elementos de un triángulo (dos ángulo, de 60 y 90 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el tercer ángulo va a estar fijo, va a medir 30 grados; los tres lados del triángulo serán diferentes; formarán un triángulo escaleno); construyen un triángulos de 90, 60 y 30 grados; prolongan y acortan los lados; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (dos ángulos fijos en el plano).

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
A-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo entre los dos lados fijos y el tercer lado pueden cambiar de medida); modifican la abertura del ángulo entre los lados fijos; condicionan el ángulo entre los lados fijos (puede cambiar de medida, pero debe estar entre 0 y 180 grados); deforman el triángulo haciendo el ángulo entre los lados fijos igual a 180 grados; prolongan y acortan el tercer lado; condicionan la prolongación del tercer lado del triángulo; suman los dos segmentos fijos; comparan la suma de los dos elementos fijos con la medida del tercer lado; para establecer que el tercer lado no puede ser mayor que la suma de los dos fijos (desigualdad triangular) o condicionar la construcción del triángulo. A-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo entre los dos lados fijos y el tercer lado pueden cambiar de medida); establecen una estrategia de construcción geométrica; modifican la abertura del ángulo entre los lados fijos; condicionan el ángulo entre lo lados fijos (puede cambiar de medida, pero debe estar entre cero y 180 grados); deforman el triángulo haciendo el ángulo entre los lados fijo igual a 180 grados; prolongan y acortan el tercer lado; condicionan la prolongación del tercer lado del triángulo; suman los dos segmentos fijos; comparan la suma de los dos elementos fijos con la medida del tercer lado; establecen que el tercer lado no puede ser mayor que la suma de los dos fijos; mantienen la forma triangular condicionando el ángulo entre los lados fijos y el tercer lado; justifican la condición del tercer lado y de los ángulos a través de la desigualdad triangular; para reconocer que en ese caso (dos segmentos fijos en el plano) se pueden construir infinitos triángulos. B-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y ángulo recto); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo del otro extremo no puede ser recto ni obtuso, los otros dos ángulos son complementarios); establecen una estrategia de construcción geométrica; modifican la abertura del ángulo que está al otro extremo del segmento fijo; prolonga y acortan los segmentos no fijos; establecen que la hipotenusa debe ser siempre mayor que el segmento fijo (está de cateto); condicionan la medida de segmentos y ángulos; construyen triángulos rectángulos isósceles; para reconocer que en ese caso (dos segmento fijo en el plano) se pueden construir infinitos triángulos. C-Seleccionan dos elemento de un triángulo (dos ángulo, de 60 y 90 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el tercer ángulo va a estar fijo, va a medir 30 grados; los tres lados del triángulo serán diferentes; formarán un triángulo escaleno); establecen una estrategia de construcción geométrica; construyen un triángulos de 90, 60 y 30 grados; prolongan y acortan los lados; establecen que se pueden formar infinitos triángulos; justifican la infinitud de los triángulos por la medida de los lados; para reconocer que en ese caso (dos ángulos fijos en el plano) se pueden construir infinitos triángulos.
Esfera
A-Seleccionan dos elemento de un triángulo (lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo entre los dos lados fijos y el tercer lado pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); trazan los segmentos fijos en la esfera; nombran sus vértices A, B y C; trasladan la estrategia del plano a la esfera; modifican la abertura (abriendo y cerrando los lados) del ángulo entre los lados fijos; trazan algunos ejemplos de triángulos; regresan al plano, para evidenciar el cambio del ángulo; establecen, erróneamente, que el ángulo entre los lados fijos puede ser mayor que 180 grados; exponen que con solo cambiar uno de los elementos se muestran infinitos triángulos; para reconocer que en ese caso (dos segmento fijo en la esfera) se pueden construir infinitos triángulos.

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
B-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo que está al otro extremo del segmento fijo puede ser agudo, recto u obtuso; los lados son geodésicas); establecen una estrategia de construcción geométrica; trazan el segmento fijo y el ángulo en la esfera; prolonga y acortan los segmentos no fijos; modifican la abertura del ángulo que estaría en el otro extremos del segmento fijo; condicionan, erróneamente, la medida de los ángulos internos a 180 grados; nombran los ángulos de los triángulos como: primero, segundo y tercero; notan que al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia; condicionan el cambio de medida de un segmento al cambio de medida del ángulo opuesto; para reconocer que en ese caso (dos segmentos fijos en la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. C- Seleccionan dos elementos de un triángulo (dos ángulos rectos); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el vértice opuesto al segmento que está entre los dos ángulos fijos es el polo de la recta que contiene ese segmento); establecen una estrategia de construcción geométrica; sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; tensan cuerdas para representar los lados del triángulo; construyen un triángulo birrectángulo; reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados; prolongan el lado que está entre los ángulos fijos [teoría de la polaridad]; establecen que, en el plano, dos ángulos fijan el tercer ángulo, pero en la esfera no; para reconocer que en ese caso (dos ángulos fijos en la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. C- Seleccionan dos elementos de un triángulo (dos ángulos rectos); sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; tensan cuerdas para representar los lados del triángulo; construyen un triángulo birrectángulo; para reconocer que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados. B- Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo que está al otro extremo del segmento fijo puede ser agudo, recto u obtuso; los lados son geodésicas); trazan el segmento fijo y el ángulo en la esfera; prolonga y acortan los segmentos no fijos; modifican la abertura del ángulo que estaría en el otro extremos del segmento fijo; condicionan, erróneamente, la medida de los ángulos internos a 180 grados; nombran los ángulos de los triángulos como: primero, segundo y tercero; notan que al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia; condicionan el cambio de medida de un segmento al cambio de medida del ángulo opuesto; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento y un ángulo fijo). C- Seleccionan dos elementos de un triángulo (dos ángulos rectos); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el vértice opuesto al segmento que está entre los dos ángulos fijos es el polo de la recta que contiene ese segmento); sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; tensan cuerdas para representar los lados del triángulos; construyen un triángulo birrectángulo; reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados; prolongan el lado que está entre los ángulos fijos [teoría de la polaridad]; para establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (dos ángulos fijos). A-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo entre los dos lados fijos y el tercer lado pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); establecen, erróneamente, que el ángulo entre los lados fijos puede ser mayor que 180 grados; identifican las geodésicas que se forman entre los tres vértices; para admitir que existen regiones formadas por tres segmentos de recta que no son triángulos. B-Seleccionan dos elemento de un triángulo (lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo que está al otro extremo del segmento fijo puede ser agudo, recto u obtuso; los lados son geodésicas); cuestionan el significado de

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
geodésica; identifican segmentos de recta que no son geodésicas; para admitir que existen regiones formadas por tres segmentos de recta que no son triángulos.
Caso 3: Tres elementos fijos (LLL, LAL, AAA)
Plano
A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida); procuran cambiar la abertura del ángulo; notan que, al cambiar la abertura del ángulo, los lados no se mantienen; observan que los tres lados fijos fijan los tres ángulos internos; para establecer una estrategia de construcción geométrica.
B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida, los otros dos ángulos son complementarios); prueban formar el triángulo colocando los elementos ALL, LAL, y LLA; establecen que el ángulo debe estar entre los dos lados fijos (LAL) o después de los dos lados (LLA); notan que en esas condiciones el tercer lado está limitado; establecen que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; para establecer una estrategia de construcción geométrica.
C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (tres ángulos, de 90, 60 y 30 grados); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que el tercer ángulo sea de 30 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados no fijos pueden cambiar de medida, los tres ángulo deben sumar 180 grados, los tres lados tendrán diferente medida, se formarán triángulos escalenos); construyen un triángulo escaleno; prolongan y acortan los lados; establecen que se pueden construir infinitos triángulos; relacionan los triángulos construidos; reconocen que los triángulos construidos son triángulos semejantes; para establecer una estrategia de construcción geométrica.
A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida); establecen una estrategia de construcción geométrica; procuran cambiar la abertura del ángulo; notan que, al cambiar la abertura del ángulo, los lados no se mantienen; observan que los tres lados fijos fijan los tres ángulos internos; para reconocer que en ese caso (tres lados fijos en el plano) se puede construir solo un triángulo.
B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida, los otros dos ángulos son complementarios); establecen una estrategia de construcción geométrica; prueban formar el triángulo colocando los elementos ALL, LAL, y LLA; establecen que el ángulo debe estar entre los dos lados fijos o después de los dos lados; notan que en esas condiciones el tercer lado está limitado; establecen que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; para reconocer que en ese caso (dos lados y un ángulo fijo en el plano) se puede construir solo un triángulo.
C- Seleccionan tres elementos de un triángulo (tres ángulos, de 90, 60 y 30 grados); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que el tercer ángulo sea de 30 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados no fijos pueden cambiar de medida, los tres ángulo deben sumar 180 grados, los tres lados tendrán diferente medida, se formarán triángulos escalenos); establecen una estrategia de construcción geométrica; construyen un triángulo escaleno; prolongan y acortan los lados, establecen que se pueden construir infinitos triángulos; relacionan los triángulos construidos; reconocen que los triángulos construidos son triángulos semejantes; establecen que los triángulos semejantes son consecuencias del paralelismo; para reconocer que en ese caso (tres ángulos fijos en el plano) se pueden construir infinitos triángulos.

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.

Esfera
A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida; comparan los segmentos y deducen que todos son desiguales); coinciden los extremos de los segmentos; sobreponen los tres segmentos en la superficie de la esfera al mismo tiempo; tesan la cuerda para representar segmentos esféricos; marcan los tres vértices del triángulo; nombran los vértices como puntos A, B y C; hacen una nueva construcción; trazan en la esfera el segmento más largo; nombran los extremos del segmento, A y B; sobreponen y tensan las cuerdas que representan los otros segmentos; trazan en la esfera los otros dos segmentos; verifican que los trazos son rectos (sobreponiendo las cuerdas tensan); para establecer una estrategia de construcción geométrica. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados son geodésicas); trazan los segmentos fijos en la esfera; prueban organizar sus elementos de las tres formas posibles: ALL, LAL, LLA; cambian la medida de un lado fijo, por lo que deducen (erróneamente) que pueden construir infinitos triángulos; notan que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; notan que se forma un ángulo de 90 grados, por lo que deducen que uno de los lados de ese ángulo puede pasar por el polo del otro lado (teoría de la polaridad); para establecer una estrategia de construcción geométrica. C- Seleccionan tres elementos de un triángulo (tres ángulos rectos); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (formarán uno o varios triángulos equiángulos); establecen, erróneamente, que cuando tengan tres ángulos también van a construir infinitos triángulos; colocan la regla esférica como una recta; tensan cuerdas para los otros dos lados; sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; procuran cambiar la medida de los lados; observan que al cambiar la medida de los lados también cambia la medida de los ángulos; establecen que los ángulos fijos, fijan también los lados; reconocen que construyeron un triángulo equiángulo, con los tres ángulos de 90 grados; reconocen que los vértices son los polos del lado opuesto, por ser tres ángulos rectos, y que los lados son radios de circunferencias máximas [teoría de la polaridad]; exponen una diferencia entre el plano y la esfera; justifican la diferencia por la existencia o no del paralelismo; para establecer una estrategia de construcción geométrica. A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida; comparan los segmentos y deducen que todos son desiguales); establecen una estrategia de construcción geométrica; coinciden los extremos de los segmentos; sobreponen los tres segmentos en la superficie de la esfera al mismo tiempo; tesan la cuerda para representar segmentos esféricos; marcan los tres vértices del triángulo; nombran los vértices como puntos A, B y C; establecen una nueva estrategia de construcción geométrica; trazan en la esfera el segmento más largo; nombran los extremos del segmento, A y B; sobreponen y tensan las cuerdas que representan los otros segmentos; trazan en la esfera los otros dos segmentos; verifican que los trazos son rectos (sobreponiendo las cuerdas tensan); exponen que los tres lados fijos fijan los tres ángulos; para reconocer que en ese caso (tres segmentos fijos en la esfera) se puede construir solo un triángulo. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados deben ser geodésicas); establecen una estrategia de construcción geométrica; trazan los segmentos fijos en la esfera; prueban organizar sus elementos de las tres formas posibles: ALL, LAL, LLA; cambian la medida de un lado fijo, por lo que deducen (erróneamente) que pueden construir infinitos triángulos; notan que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; notan que se forma un ángulo de 90 grados, por lo que deducen que uno de los lados de ese ángulo puede pasar por el polo del otro

Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.

lado (teoría de la polaridad); para reconocer que en ese caso (dos segmentos y un ángulo fijo en la esfera) se puede construir solo un triángulo.

C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (tres ángulos rectos); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (construirán uno o varios triángulos equiángulos); establecen una estrategia de construcción geométrica; establecen, erróneamente, que cuando tengan tres ángulos también van a construir infinitos triángulos; colocan la regla esférica como una recta; tensan cuerdas para los otros dos lados; sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; procuran cambiar la medida de los lados; observan que al cambiar la medida de los lados también cambia la medida de los ángulos; establecen que los ángulos fijos, fijan también los lados; reconocen que construyeron un triángulo equiángulo, con los tres ángulos de 90 grados; reconocen que los vértices son los polos del lado opuesto, por ser tres ángulos rectos, y que los lados son radios de circunferencias máximas [teoría de la polaridad]; exponen una diferencia entre el plano y la esfera; justifican la diferencia por la existencia o no del paralelismo; para reconocer que en ese caso (tres ángulos fijos en la esfera) se puede construir solo un triángulo.

A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida; comparan los segmentos y deducen que todos son desiguales; exponen que los lados de esos triángulos deben ser geodésicas); trasfieren la idea de la desigualdad triangular del plano a la esfera; pasan los segmentos esféricos al plano, tensando las cuerdas en el plano; suman dos segmentos esféricos; comparan la suma de dos segmentos con el tercer lado; notan que en la esfera se cumple la desigualdad triangular; para establecer la desigualdad triangular en la esfera (sin corroborar que en este caso dos lados pueden ser mayores o iguales que el tercer lado).

Caso extra: Tres elementos fijos (LAA)

Plano

A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); colocan los ángulos en los extremos del segmento; procuran prolongar y acortar los lados no fijos; notan que esos elementos fijan a los elementos restantes; reconocen que su triángulo es rectángulo (por la selección de sus ángulos, el tercer ángulo debe medir 90 grados); para establecer una estrategia de construcción geométrica.

B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que la suma de los dos ángulos no sea igual o mayor a 180 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); colocan los elementos en diferentes posiciones para verificar si se forma el triángulo: ALA, AAL, LAA; cambian los ángulos de posición; para establecer una estrategia de construcción geométrica.

C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que la suma de los dos ángulos no sea igual o mayor a 180 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); establecen una estrategia de construcción geométrica; construyen un triángulo; reconocen que su triángulo es rectángulo; notan que esos elementos fijan a los elementos restantes; para establecer una estrategia de construcción geométrica.

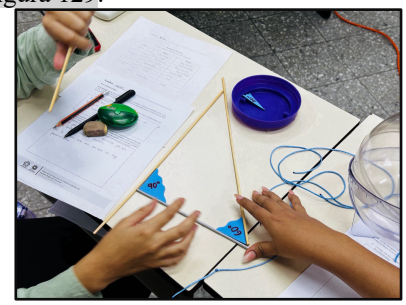
A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); establecen una estrategia de construcción geométrica; procuran

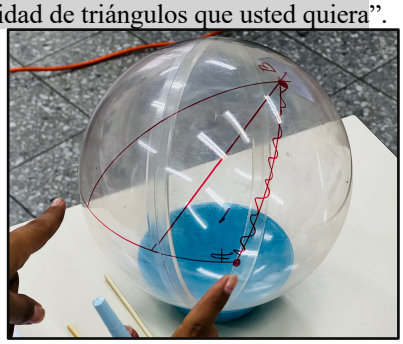
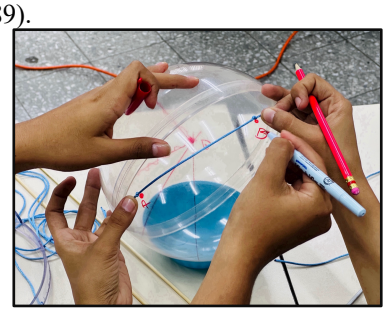
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
prolongar y acortar los lados no fijos; notan que esos elementos fijan a los elementos restantes; reconocen que su triángulo es rectángulo (por la selección de sus ángulos, el tercer ángulo debe medir 90 grados); para reconocer que en ese caso (LAA fijos en el plano) se puede construir solo un triángulo. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que la suma de los dos ángulos no sea igual o mayor a 180 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); establecen una estrategia de construcción geométrica; colocan los elementos en diferentes posiciones para verificar si se forma el triángulo: ALA, AAL, LAA; cambian los ángulos de posición; para reconocer que en ese caso (LAA fijos en el plano) se puede construir solo un triángulo. C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que la suma de los dos ángulos no sea igual o mayor a 180 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); establecen una estrategia de construcción geométrica; construyen un triángulo; reconocen que su triángulo es rectángulo; notan que esos elementos fijan a los elementos restantes; para reconocer que en ese caso (LAA fijos en el plano) se puede construir solo un triángulo.
Esfera
A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); trazan el lado fijo y nombran los extremos como puntos C y D; colocan los ángulos en los extremos del segmento; mantienen el ángulo de 60 grados entre el segmento fijo y la regla esférica; marcan un punto para mantener la abertura del ángulo de 45 grados; tensan una cuerda que pasa por el vértice D y el punto que mantienen la abertura del ángulo de 45 grados; para establecer una estrategia de construcción geométrica. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo de 150 grados y ángulo de 60 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); prueban formar un triángulo en el que la suma de sus ángulos internos sea mayor a 180 grados; trazan el lado fijo y nombran los extremos como puntos A y B; trazan una recta completa para tomar de ella un segmento no fijo con un ángulo de 60 grados respecto del segmento fijo; colocan el ángulo de 150 grados en diferentes posiciones; mueven el ángulo de 150 sobre la recta; prologan los lados de los ángulos e identifican sí coinciden o no con el otro lado; para establecer una estrategia de construcción geométrica. C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, dos ángulos de 90 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); trazan el segmento fijo; colocan los dos ángulos rectos en los extremos del segmento fijo; tensan cuerdas para representar los lados no fijos; procuran cambiar la medida de los elementos no fijos; notan que esos elementos fijan a los demás; para establecer una estrategia de construcción geométrica. A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); establecen una estrategia de construcción geométrica; trazan el lado fijo y nombran los extremos como puntos C y D; colocan los ángulos en los extremos del segmento; mantienen el ángulo de 60 grados entre el segmento fijo y la regla esférica; marcan un punto para mantener la abertura del ángulo de 45 grados; tensan un cuerda

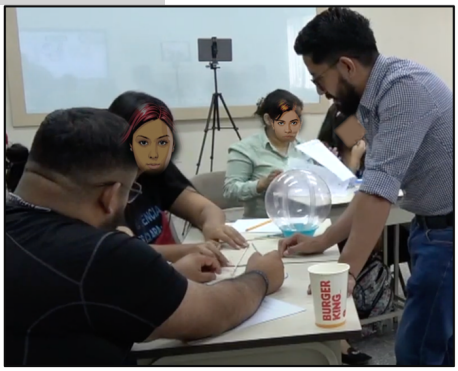
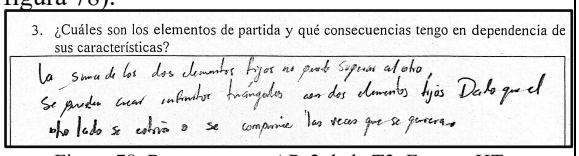
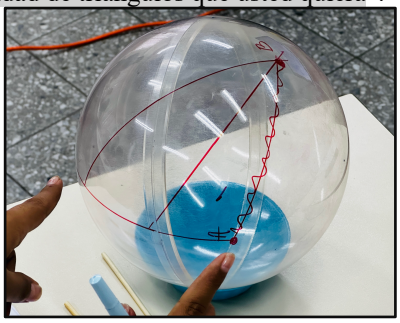
Nivel de actividad
Reconocer articulaciones de acciones que justifique el *por qué y para qué lo hace*.
que pasa por el vértice D y el punto que mantienen la abertura del ángulo de 45 grados; para reconocer que en ese caso (LAA en la esfera) se puede construir solo un triángulo. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo de 150 grados y ángulo de 60 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); establecen una estrategia de construcción geométrica; prueban formar un triángulo en el que la suma de sus ángulos internos sea mayor a 180 grados; trazan el lado fijo y nombran los extremos como puntos A y B; trazan una recta completa para tomar de ella un segmento no fijo con un ángulo de 60 grados respecto del segmento fijo; colocan el ángulo de 150 grados en diferentes posiciones; mueven el ángulo de 150 sobre la recta; prologan los lados de los ángulos e identifican sí coinciden o no con el otro lado; identifican que solo en el caso ALA se forma un triángulo; para reconocer que en ese caso (LAA en la esfera) se puede construir solo un triángulo. C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, dos ángulos de 90 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); establecen una estrategia de construcción geométrica; trazan el segmento fijo; colocan los dos ángulos rectos en los extremos del segmento fijo; tensan cuerdas para representar los lados no fijos; procuran cambiar la medida de los elementos no fijos; notan que esos elementos fijan a los demás; para reconocer que en ese caso (LAA en la esfera) se puede construir solo un triángulo. -.-.-.-.-.-. A-B-C-Seleccionan elementos fijos de un triángulo en el plano y en la esfera (uno, dos y tres); construyen triángulos en cada uno de esos casos; describen los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno; establecen que en algunos casos los elementos fijos condicionan a los otros elementos; asocian la construcción única de los triángulos con la congruencia; ejemplifican como criterios de congruencia los casos trabajados en los que se construye solo un triángulo (LLL, ALA, LAL y AAA [caso extra en la esfera]); exponen una estrategia (uso de trigonometría) para calcular los elementos restantes en los casos en los que se construye solo un triángulo [A]; para reconocen que, si dos triángulos comparten elementos, como en los casos en los que solo se podía construir un único triángulo, ambos triángulos son congruentes. A-B-C-Seleccionan elementos fijos de un triángulo en el plano y en la esfera (uno, dos y tres); construyen triángulos en cada uno de esos casos; describen los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno; notan que para el caso AAA hay una diferencia entre el plano (se pueden construir infinitos triángulos) y en la esfera (un único triángulo); justifican que en el plano se pueden construir infinitos triángulos por la semejanza; justifican que en la esfera se puede construir un único triángulo en el caso AAA, porque no hay paralelismo; para establecer que en la esfera se tiene un nuevo criterio de congruencia de triángulo, AAA.

2-2 Análisis de usos: parte VI

En el papel que desempeña la noción matemática en la tarea se hará una distinción entre el plano [p] y la esfera [E]. En la tabla anterior (análisis de acciones y actividades), se marcarán las acciones y actividades donde estén involucradas las nociones matemáticas de interés.

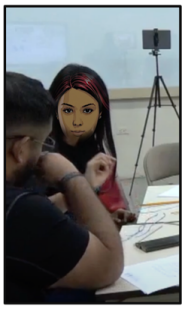
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Recta y segmento de recta plano y esférico		
En las acciones	Seleccionan uno, dos o tres elementos de un triángulo [L, LL, AL, AAL, ALL, LLL].	El equipo A seleccionó un segmento. IP pregunta si ese fuera obtuso, cómo sería el ángulo del otro extremo del segmento, el V-AP3-S3|0:08:16-0:08:16|: "Sería agudo". El IP pregunta si el primero es agudo, cómo puede ser otro ángulo del otro extremo del segmento, el V-AP3-S3|0:08:26-0:08:26|: "Obtuso". El IP dice: "Solo obtuso"; aceptan que puede ser agudo, obtuso o recto.	Seleccionan el segmento, señalan los extremos el segmento, colocan los ángulos en sus extremos y el segmento es uno de los lados de esos ángulos.	El segmento **tiene extremos** [P y E]. El segmento **es un elemento compositor** (compone ángulos) [P, E].
	Exponen su o sus elementos de partida y sus consecuencias.	El equipo B seleccionó un segmento. En la DE, V-BP1-S3|0:12:16-0:12:24|: "Sí es recto este debe ser agudo [BPa3: Sí], y este también es agudo", V-BP1-S3|0:13:33-0:13:46|: "El elemento que está fijo es este, pueden cambiar los otros lados y los tres ángulos, entonces estamos viendo los ángulos ahorita", (T5) V-CPa1-S3|3:16:35-3:16:36|: "Dos ángulos y un lado", V-CPa1-S3|3:16:55-3:16:59|: "Estos van a ser los fijos, estos tres", V-CPa1-S3|3:17:03-3:17:13|: "Pero estos pueden variar… [APa3: Ok, no, porque no estaría en 90]", V-CP2-S3|3:17:22-3:17:27|: "Hágalos así, [CPa1: El que, este], sí, fíjese si sigue de 90". Hicieron la construcción que aparece en la figura 129.  Figura 129. Construcción del equipo C para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.	Seleccionan un segmento, aceptan que la longitud del segmento es fija, prolongan y acortan la longitud de los lados no fijos. Seccionan un segmento fijo, reconocen que la longitud de los segmentos no fijos puede cambiar pero los elementos fijos las fijan.	Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. Segmento **condicionado** [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E].
	Trazan (o tensan cuerda) y nombran los elementos fijos: lados y ángulos y lados.	V-APa2-S3|0:50:18-0:50:23|: "Son infinitos, si trazo esta aquí se van uniendo con este punto y van haciendo triángulos infinitos [AP3: Ajá, sí, correcto; en su representación muestra dos casos (ver figura 75)]", V-APa1-S3|0:50:25-0:50:27|: "Pero son triángulos esos [AP3: Sí]". V-AP3-S3|0:50:34-0:50:36|: "Es que está en función a una perpendicular, esos triángulos", la V-APa2-S3|0:50:39-0:50:43|: "Están en función a esta [señala el segmento consecutivo al ángulo A de su representación], van a ser infinitos", V-APa2-	Trazan segmento entre dos puntos, y con ellos van construyendo triángulos. Reconocen que los triángulos estan en función a una perpendicular al segmento fijo.	Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		S3|0:50:44-0:50:47|: "Y ahí puede tener la posibilidad de triángulos que usted quiera".  Figura 75. Construcción del equipo A para un lado fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-Sesión 3.		**Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como catetos e hipotesusas de triángulos rectángulos [E].
		el AP3-S3|2:20:21-2:20:24|: "Ah, sí, hay que marcar el más largo entonces". Marcan un segmento y nombran los extremos como punto A y B (ver figura 88), APa1-S3|2:21:26-2:21:40|: "Marque aquí [AP3: Aquí, este], hasta aquí, ¿verdad? [AP3: No, marque este punto y ahí, sí, con la regla, ese va para acá y el otro va para acá]". Finalmente, marcan los tres puntos y colocan las cuerdas para verificar (ver figura 89).  Figura 88. El equipo A marca un segmento. Fuente: Fotografía-sesión 3.	Seleccionan el segmento más largo y lo trazan en la esfera. Tesan una cuerda entre dos puntos para representar el segmento esférico. Nombran los extremos del segmento A y B. Verifican la rectitud del segmento tensando una cuerda sobre el segmento.	Segmento **como una cuerda tensa** [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. El segmento **tienen extremos** [P y E].
	Prolongan y acortan los lados no fijos.	V-BP1-S3|0:25:49-0:25:59|: "Infinitos, según nosotros son infinitos, [IP: ¿Por qué?], pero es que no sé, porque aquí estamos moviendo, estos dos se extienden hasta donde usted quiera". En la DG, el V-BP1-S3|0:34:24-0:35:23|: "Bueno, dado un segmento fijo, nos dábamos cuenta de que estos dos lados podrían moverse tanto como quisiéramos, hacia un lado o hacia otro. Los lados no se ven limitados, porque los lados se pueden extender tanto como nosotros queramos;	Prolongan y acortan los segmentos no fijos. Señalan el segmento fijo y los segmentos que pueden cambiar de longitud.	Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E].
	Condicionan la prolongación del tercer lado del triángulo (no puede ser mayor o	El IP pregunta: "¿Puedo decir algo de este lado en dependencia de estos dos [los dos fijos]?", APa1-S3|1:32:13-1:30:28|: "Si lo pone así, ahí son 180, digamos, tendría que abarcar de vértice a vértice [refiere a la suma de los dos fijos (ver figura 76)], como la misma, que la suma de estas dos tendría que ser [refiere a la desigualdad triangular, la cual menciona explícitamente en sus HT (ver figura 77)]". El IP pregunta si puede ser mayor, APa1-	Suman dos segmentos y establecen que el tercer segmento deben ser menor que la suma de esos dos.	El segmento **compuesto por segmentos** [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E].

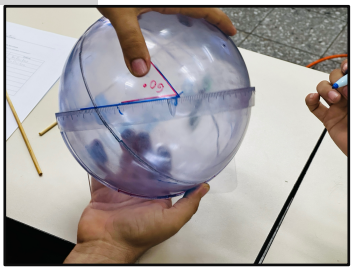
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	igual a la suma de los otros dos).	S3|1:32:39-1:32:40|: "No", AP3-S3|1:32:40-1:32:50|: "No sí, mayor puede ser esta [el IP aclara que se puede prolongar, pero siempre formando un triángulo], ahh no", AP3-S3|1:32:55-1:32:56|: "Está condicionado a esos dos". El IP: "Cuántos triángulos se pueden formar", AP3-S3|1:33:22-1:33:23|: "Infinitos también".  Figura 76. APa1 muestra la desigualdad triangular en el plano. Fuente: Video-sesión 3.	Prolongan el segmento no fijos pero siempre y cuando se mantenga la desigualdad triángular, para mantener la forma triangular.	Segmento **extensible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E].
		La APa2 describe la desigualdad triangular y justifica la infinitud de los triángulos por el cambio, extenderse o comprimirse, del lado restante (ver figura 78).  3. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características? Figura 78. Respuesta por APa2 de la T3. Fuente: HT.	Suman dos segmentos y establecen que el tercer segmento deben ser menor que la suma de esos dos.	El segmento **compuesto por segmentos** [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E].
	Agregan elementos o propiedades auxiliares: segmentos perpendiculares; E-agregan una tercera recta y la movilizan como si fuera paralelo a la posición inicial.	V-AP3-S3|0:50:34-0:50:36|: "Es que está en función a una perpendicular, esos triángulos", la V-APa2-S3|0:50:39-0:50:43|: "Están en función a esta [señala el segmento consecutivo al ángulo A de su representación], van a ser infinitos", V-APa2-S3|0:50:44-0:50:47|: "Y ahí puede tener la posibilidad de triángulos que usted quiera".  Figura 75. Construcción del equipo A para un lado fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-Sesión 3.	Trazan segmento entre dos puntos, y con ellos van construyendo triángulos. Reconocen que los triángulos estan en función a una perpendicular al segmento fijo.	Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. **Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como catetos e hipotesusas de triángulos rectángulos [E].
	Experimenta n y notan: P y E – desigualdad	V-APa1-S3|1:10:33-1:10:34|: "Infinitos", el V-AP3-S3|1:10:35-1:11:48|: "Infinitos también, igual al momento en el que yo hago los triángulos en función a la circunferencia máxima; si yo muevo los ángulos,	Trazan una circunferencia máxima y construyen un triángulo en dependencia a	**Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	triangular; en los casos en que se construyen infinitos triángulos se muestran con solo cambiar la medida de uno de sus elementos no fijos; al cambiar la medida de un ángulo también cambia el segmento opuesto y viceversa; en los casos en que se construye un único triángulo, los tres elementos fijos fijan a los demás; si hay un ángulo de 90 grados uno de esos lados pasa por el polo del otro.	de manera perpendicular se forman infinitos triángulos". la APa2 hace la construcción del triángulo con los tres lados fijos, intenta cambiar los ángulos, pero reconoce que al cambiar los ángulos los lados fijos no se mantienen, por lo que vuelve a construir el triángulo inicial (ver figura 85). Ante ello, el AP3-S3|2:16:58-2:17:11|: "Sí, solo uno se puede hacer [APa1: Porque son fijos, ¿verdad?], sí, no los puede mover, no puede hacer nada [todo el equipo se ríe porque no pueden mover los lados]". (T5) El IP: "Dados esos tres lados fijos, de partida, ¿puedo decir algo de los ángulos?", el AP3-S3|2:17:45-2:17:46|: "Están fijos también [APa1: Están fijos]", el IP: "¿Por qué?", APa1-S3|2:17:51-2:17:56|: "Porque los lados no se pueden mover, no tienen movilidad". El IP: "Su triángulo pareciera que es equilátero, ¿lo es o no? [Porque seleccionaron lados casi del mismo tamaño]". El AP3-S3|2:18:05-2:18:07|: "No, son diferentes". (T6) El IP: "Entonces, ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?", el AP3-S3|2:18:13-2:18:13|: "Uno", APa1-S3|2:18:14-2:18:16|: "Si tengo los tres lados fijos". Figura 85. APa2 construye un único triángulo dado los tres lados fijos. Fuente: Video-sesión 3. APa1-S3|2:47:05-2:48:27|: "Bueno, pues con estos lados solo podemos construir un triángulo en el plano, por ende, si los lados están fijos, también sus ángulos son fijos; si no se están moviendo los lados, los ángulos también se mantienen fijos [esto lo describe en sus HT (ver figura 91)]. En la esfera, igual formamos un solo triángulo, solamente que vimos la particularidad, notamos que cuando hicimos las construcciones de los lados del triángulo en la esfera, deben tener ciertas características para poder formar lo que es el triángulo, entonces hay que saber las longitudes, así como en el plano se da la desigualdad triangular, como se cumple verdad, que la medida de dos lados, la suma de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado y también lo pudimos ver en la esfera; qué quiere decir eso, que no pusimos al azar, al punto que calzara justamente, probamos eso, que la suma de dos lados es mayor que el tercer lado en la esfera". V-BP1-S3|2:51:18-2:52:17|: "Bueno, en el plano nos dimos cuenta que podíamos colocar ese ángulo entre los dos lados o podríamos colocarlo y en el exterior	esa recta y un segmento perpendicular a ella. Construyen un triángulo con los tres lados fijos. Establecen que esos tres lados fijos fijan también los tres ángulos. Por lo que deducen que solo se puede construir un triángulo. Establecen que con los tres lados fijos en el plano y la esfera, también sus ángulos están fijos. Establecen la desigualdad triángular en la esfera, que la medida de dos lados es mayor que la longitud del tercer lado. Colocan los ángulos en los extremos de los segmentos.	**Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como catetos e hipotesusas de triángulos rectángulos [E]. El segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. El **segmento condicionador** (fijan los ángulos) [P y E]. El segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. El **segmento condicionador** (fijan los ángulos) [P y E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. El segmento **compuesto por segmentos** [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E]. El segmento **tiene extremos** [P y E].

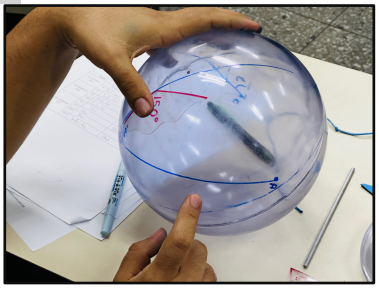
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		del otro lado, pero de igual forma probamos que el tercer lado se veía condicionado; o sea, la longitud del tercer lado estaría condicionada por lo que solo se podría formar un triángulo, eso en el plano. De igual forma, en la esfera, los dos segmentos que formamos eran geodésicas y también corroboramos colocar el ángulo entre los dos segmentos y en la parte superior del otro segmento [refiere al extremo de uno de ellos], y también la tercera geodésica era única, entonces era única la otra, entonces solo se podía formar un triángulo". (T6) Hacen la construcción que se presenta en la figura 106, V-BP1-S3|3:09:34-3:10:33|: "Igual, solo uno, porque si pongo este aquí [BPa3: Al contrario, póngalo ahí], miren, aquí tiene 30, pero no llega allá [APa2: No llega], pero puede acá, pero puede ser acá, hasta ahí, pero igual solo se forma uno [BPa2: Sí]". V-BP1-S3|3:10:36-3:10:56|: "¿Puede formar infinitos? Porque el ángulo este lo puedo mover acá, pero el segmento no llega acá, no va a llegar allá, entonces son condicionados los lados, o sea, este ángulo, uno, un triángulo". Figura 106. Construcción del equipo B para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3.	Reconocen que el tercer lado están limitado por los otros elementos, por lo que solo se puede formar un triángulo. Exponen que los segmentos son geodésicas, colocan el ángulo entre los segmentos, es decir que los segmentos son los lados del ángulo. Construyen un triángulo con un lado fijo y dos ángulos. Reconocen que esos elementos fijan los otros elementos del triángulos, por lo que solo se puede construir un único triángulo.	Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. El segmento **es un elemento compositor** (compone ángulos) [P, E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E].
	Establecen propiedades erróneas: P- que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo; P- con un segmento fijo solo se forma un triángulo rectángulo; E-pueden ser triángulos finitos porque las rectas son finitas; E- el ángulo entre los lados	V-BP1-S3|0:56:10-0:56:52|: "Vamos a ver, si yo tengo este acá y trato de extenderlo, extenderlo, todo, todo, todo; porque en estas, decíamos que estas cosas se extendían, ¿verdad?, [BPa3: Por eso le decía que aquí, será que no] [a esto se refería cuando decía que eran finitas, a que las rectas eran finitas], es cierto, si usted extiende va a poner acá [llegar al inicio] y si extiende este va a llegar acá, entonces, se forma un triángulo acá, y se va a formar un ángulo también acá, se forman dos triángulos… ya van a ver que se va a formar", estaba esperando la regla, el V-BP1-S3|0:57:00-0:57:02|: "O necesitamos un cordón más grande", el V-BP1-S3|0:57:00-0:57:22|: "Pero es que se van a formar dos triángulos [está pensando en el trazo de tres rectas completas y los triángulos son opuestos]…, imagínense que este segmento de acá lo extienden todo", V-BPa2-S3|0:57:33-0:57:49|: "Pero aquí creo que no pueden ser infinitos porque, es cierto, la superficie es finita, no puede extender demasiado eso [BPa3: Pero el detalle es que aquí son triángulos], por eso".	Prolongan los segmentos no fijos. Establecen que las rectas en la esfera son finitan. Trazan segmentos entre dos puntos. Forman triángulos con los segmentos. Exponen que necesitan cuerdas para trazar rectas esférica completas. Reconocen que tres rectas esfericas forman dos triángulos opuestos.	Segmento **extensible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. **Recta finita-ilimitada** [E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Segmento **como una cuerda tensa** [P y E]. **Tres rectas en el plano forman un triángulo** [P]. **Tres rectas esféricas forman dos triángulos** [E].

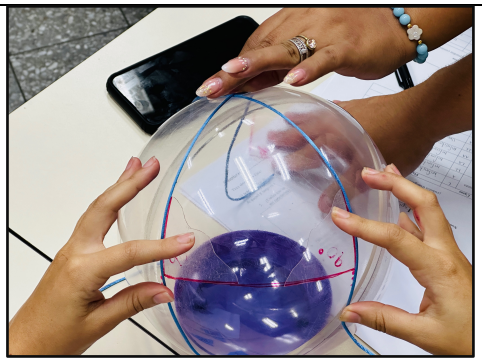
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	fijos puede ser mayor que 180 grados.			
	Establecen propiedades: P y E - el tercer lado no puede ser mayor que la suma de los dos fijos; P- la hipotenusa debe ser siempre mayor que el segmento fijo (está de cateto); P y E – en los casos en que se construye un solo triángulo, esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; E- con tres rectas se forman dos triángulos opuestos; E- las perpendiculares se intersecan en el polo del segmento base [teoría de la polaridad]; E- la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados; E- (con tres ángulos rectos), los	APa1-S3|2:23:14-2:23:54|: "La suma de estos dos debe ser mayor que este, la suma de estos dos debe ser mayor que la longitud de este al igual que, si me entienden, porque por ejemplo [menciona a APa2], usted los pusimos al azar, como que lo fuimos midiendo para que marcara punto a punto… se debe descubrir creo yo la desigualdad triangular, solo uno, sí, pero como se forma, dado la desigualdad triangular", APa1 reconoce cada lado en la esfera y luego los coloca en el plano [como cuerdas tensas] para verificar la desigualdad triangular (ver figura 90). El AP3-S3|2:24:04-2:24:11|: "Siento que tiene sentido porque al ser en la esfera".  Figura 90. APa1 verifica la desigualdad triangular para triángulos esféricos. Fuente: Video-sesión 3. El V-BP1-S3|1:39:34-1:39:50|: "Bueno, los otros dos lados pueden ser tan grandes como sean o tan pequeños, bueno, tan pequeños no, este no puede llegar a ser el mismo que este, tiene que ser mayor [por ser la hipotenusa]". El IP: "Puedo decir algo de los otros ángulos", el V-BP1-S3|1:39:59-1:40:25|: "De los ángulos, bueno, dado que este es 90, tendrían que ser complementarios, cierto que este es 90, pero [el IP pregunta si deben ser suplementarios para llegar hasta 180], no, estos dos [señala los dos ángulos restantes], [IP: O sea que este no puede ser recto], ajá, este no puede ser recto, debe ser agudo". EL IP: "Dado esos elementos que tienen de partida, ¿qué podemos decir de los otros elementos?", el V-BP1-S3|2:28:24-2:29:05|: "Bueno, los otros, dado que este mide 90, lo mismo, que estos tienen que ser complementarios [que los otros dos ángulos deben sumar 90 grados]. Este segmento [el tercero], ya se ve delimitado, tiene que tener una medida exacta para formar el triángulo, porque si ya lo hago más, o sea, esta sería la medida exacta para formar el triángulo, que si mide más, ya no; si mide menos, tampoco, entonces la longitud del tercero estaría condicionada".	Suman dos segmentos y establecen que el tercer segmento deben ser menor que la suma de esos dos. Prolongan el segmento no fijos pero siempre y cuando se mantenga la desigualdad triángular, para mantener la forma triangular. Prolongan y acortan los lados no fijos. Condicionan el segmento, ya que no puede ser tan pequeño, por ese lado es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Reconocen que con esos elementos el tercer elemento está limitado, debe tener una medida exacta para formar el triángulo.	El segmento **compuesto por segmentos** [P y E]. Segmento **como un relación estática** [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E]. Segmento **extensible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. El **segmento condicionado** (por ser la hipotenusa debe ser más grande que los otros dos]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E].

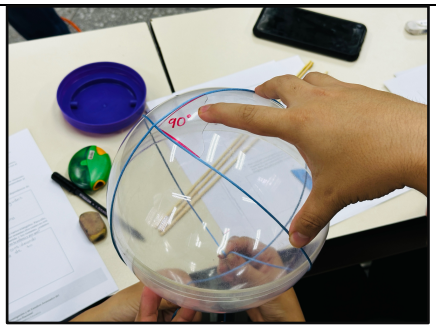
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	vértices son los polos de los lados opuestos y los lados son radios de circunferencias máximas [teoría de la polaridad];	(T6) V-BP1-S3|2:35:07-2:36:15|: "Pero parece que son perpendiculares ustedes [BPa3: Sí], será que estas van al polo, porque yo estoy manteniendo este segmento fijo y este también fijo, pero miren si yo lo pongo acá, se pueden formar infinitos triángulos. Miren, ahh no, [BPa2: Este hay que considerarlo también, porque está fijo el de abajo], ahh es cierto, [BPa2: El de abajo también es fijo], es cierto, estoy formando este triángulo, este está fijo, pero este también, pero no llegan a formar acá, es cierto, solo es uno".	Reconocen que dos segmentos son perpendiculares, por lo que si se continía llegan al polo del otro. Señalan el segmento fijo, y como los elementos fijos fijan a los otros elementos.	**Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. **Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como catetos e hipotesusas de triángulos rectángulos [E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E].
	Identifican segmentos que no son geodésicas.	V-BPa3-S3|1:49:50-1:49:51|: "¿Qué es la geodésica?", V-BP1-S3|1:49:58-1:50:14|: "Es la distancia mínima entre dos puntos, la distancia mínima entre los dos puntos en la esfera, pero en el plano, aquí yo tengo dos puntos y la distancia mínima en la recta, porque puedo tener este, pero no es la distancia mínima". V-BPa3-S3|1:50:21-1:50:22|: "Entonces, a la conclusión a la que llegamos, es lo que dijo usted". V-BP1-S3|1:50:23-1:50:35|: "Hay que poner eso, porque la graduación del segundo ángulo y con el tercer segmento", la V-BPa2-S3|1:50:51-1:50:53|: "Porque la graduación puede variar tanto como queramos".	Cuestionan el significado de geodésica, la caracteriza como la distancia mínima entre dos puntos. Señalan segmento de recta que no son la distancia mínima entre dos puntos.	Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento de recta que no representa la distancia menor entre dos puntos- **segmentos de recta que no son geodésicas** [E].
		Ángulo plano y esférico		
	Seleccionan uno, dos o tres elementos de un triángulo [A, AA, LA, LLA, LAA, AAA]. Exponen su o sus elementos de partida y sus consecuencias.	(T5 y T6) El AP3-S3|3:02:00-3:02:02|: "Un lado, ángulo, ángulo", APa1-S3|3:02:05-3:02:07|: "Un lado fijo y dos ángulos", AP3-S3|3:02:33-3:02:40|: "90, es un rectángulo, igual solo se puede formar uno [la APa2 y el AP3 hacen la construcción de la figura 92]", V-APa2-S3|3:02:41-3:02:43|: "Sí porque están condicionados [refiere al resto de los elementos]". (T3 y T4) Seleccionaron un ángulo de 90 grados y un lado, el V-BP1-S3|1:38:35-1:39:25|: "Pero este puede ser hasta 89.99999, porque este puede extender, pero 90 no, entonces igual se puede formar infinitos, … Solo que los elementos es que los lados pueden ser tan largos como sean, pero los ángulos, si se fijan ustedes, este es 90, entonces este tiene que ser complementario [refiere a que los dos restantes deben ser complementarios], [BPa3: Tendrían que medir 45], pero igual son infinitos [BPa2: Sí, es cierto], porque de aquí yo puedo tener este ángulo, este otro, este otro; pero no puede llegar a 90". (T1) El equipo C seleccionó un ángulo. Al preguntar sobre lo que podemos decir de los otros elementos dado el elemento que seleccionaron, un ángulo de 60 grados (ver figura 111), el V-CP2-S3|0:15:32-0:15:34|: "Que van a sumar 120", V-CPa1-S3|0:16:04-0:16:06|: "Todos van a ser igual a 60", el IP pregunta si alguno de los otros ángulos puede ser	Seleccionan ángulos para construir triángulos. Seleccionan un ángulo recto y forman triángulos rectángulos. Reconocen que esos elementos fijan los otros elementos. Cambian la medida de los ángulos. Limitan la medida de los ángulos a la suma de 180 grados. Los ángulos no fijos pueden cambiar de medida hasta cerca de 90 grados. Suman dos ángulos para forman ángulos complementarios. Seleccionan un ángulo de 60 grados. Por lo que los otros ángulos deben sumar 120 grados para sumar en total 180 grados.	El ángulo como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. El ángulo como **argumento en la nomeclatura y clasificación de triángulos** [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		obtuso, el V-CP2-S3|0:16:18-0:16:21|: "No… oh sí, si en el caso fuera 120… No, si el otro mide 100 y el otro puede medir perfectamente 20", V-CPa3-S3|0:16:34-0:16:34|: "Para tener la suma de los 180".		El **ángulo recto como referente de medida** [P y E]. Ángulo **compuesto por ángulos** [P y E].
	Trazan y nombran los elementos fijos: ángulos y ángulos y lados.	(T3) V-BP1-S3|1:42:08-1:42:10|: "Ahora, en el coso este, hay que medirlo". Marcan el segmento y el ángulo en la esfera (ver figura 103). V-BP1-S3|1:44:25-1:45:11|: "Entonces lo mismo, este se extiende…, pero vamos a ver, este lado tiene que ser mayor a este, porque aquí ya dibujamos el ángulo y este se extiende. Aquí es donde mide 60 [la medida del ángulo seleccionado]; se extiende, pero igual que con el otro plano. Este, por ejemplo, tiene que ser mayor a este. Es que este ángulo del otro lado, para formar un triángulo, puede ser agudo, puede ser recto y puede ser obtuso".  Figura 103. Construcción del equipo B dado un ángulo y un lado. Fuente: Fotografía-sesión 3.	Sobreponen el ángulo fijo sobre la superficie de la esfera. Describen que uno de los ángulo no fijos puede ser agudo, recto y obtuso.	Ángulo **como una cualidad** por su forman [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Medida del ángulo como **criterio de clasificación** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. **Ángulo compuesto** por dos rectas que se intersecan en un punto [P y E].
	Abren y cierran la abertura de los ángulos no fijos.	V-AP3-S3|0:11:07-0:11:34|: "Bueno, pero, si lo mueve aquí y lo mueve para este lado, los ángulos, ambos estos ángulos puede ser agudos u obtusos y este si va a ser agudo siempre, el de arriba, el de arriba no siempre sería agudo, pero si lo mueve, si esto lo mueve para este lado, este sería el obtuso y este sería el agudo y este de aquí siempre sería agudo, este de aquí arriba". V-BP1-S3|0:26:07-0:26:46|: "Bueno, este ángulo se puede mover hasta antes de 180, pero no puede llegar a ser 180... para formar un triángulo. Cuando llega a formar el ángulo de 180, ya no se forma un triángulo". el V-CP2-S3|0:28:44-0:29:27|: "Solo a partir del ángulo, del ángulo son 120 [APa2: Sí, porque se van a ir moviendo]. En realidad, no serían 120, serían 119, porque el ángulo puede ir variando. Digamos, acá tengo 60; si yo lo muevo a 61, entonces va a ser 59, 62, 58, y va a ir así sucesivamente hasta llegar a 120, 119, sí, sí,119, y que el otro mida 1 grado [está variando los otros dos ángulos de forma entera]".	Cambian la medida de los ángulos no fijos. Clasifican los ángulos según su medida; puede ser agudos, rectos u obtusos. Indican que en dependencia de la medida de un ángulo el otro está limitado a ser agudo. Cambian la medida de un ángulo siempre y cuando sea menor que 180 grados. Cambian la medida de los ángulos no fijos. Cambian los ángulo manteniendo los 180 grados que suman los ángulos internos del triángulo en el plano.	Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Medida del ángulo como **criterio de clasificación** [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo, siempre va a ser agudo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Ángulo de 180 grados como **referente de medida** de ángulos [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P].
	Condicionan la abertura de los ángulos	V-AP3-S3|1:29:46-1:30:19|: "También se pueden formar infinitos, pero que el ángulo superior, o el ángulo formado por los dos segmentos, sí, el ángulo formado por los dos segmentos fijos tiene que estar,	Exponen que el ángulo está formado por dos segmentos fijos, y que no puede ser de 180 grados.	Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	planos (puede ser casi llano, sumar 180 grados).	no puede ser menor que 180, no puede ser mayor o igual que 180 sería, tiene que ser a fuerza menor que 180", APa1-S3|1:30:21-1:30:28|: "Puede ser infinitos porque, porque bueno estos se unen, este cambia, este no, este no", V-AP3-S3|1:30:28-1:30:59|: "Solo que no sé, al ser esos dos lados fijos si no los puede cortar [APa2: No lo puede cortar], no se puede sobreponer, este si lo puede estirar cuanto usted quiera, pero como le digo entre estos dos se vaya haciendo el ángulo más grande va a llegar un punto en que va a tender a esto, va a ser así y ahí ya no sería triángulo, entonces se puede poner de tal manera que este ángulo formado por esos dos fijos no sea 180".	Cambian la medida de ese ángulo pero está obligado a ser emnor que 180 grados. Forman diferentes triángulos cambiando la medida del ángulo, pero explicitan que si el ángulo llega a ser de 180 grados se deforma el triángulo.	Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo, siempre va a ser menor que 180 grados) [P y E]. Ángulo **condicionador** (la forma triangular) [P y E]. Ángulo de 180 grados como **referente de medida** de ángulos [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P].
	Agregan elementos o propiedades auxiliares: fijan un ángulo, trasladan un ángulo sobre una recta; deforman el triángulo haciendo el ángulo entre los lados fijos igual a 180 grados; notan que para el caso AAA hay una diferencia entre el plano (se pueden construir infinitos triángulos) y en la esfera (un único triángulo).	El AP3-S3|3:03:20-3:03:53|: "¿Y en la esfera?..., y con un lado, ese es el rollo, ah, es que el lado hay que marcarlo, ¿verdad?". Trazan el lado y marcan los puntos de inicio y final con las letras C y D (ver figura 93). AP3-S3|3:04:56-3:04:59|: "Solo es el lado fijo [APa1: Los otros dos lados se están moviendo]". El AP3-S3|3:05:29-3:07:03|: "Me espera, me espera, no va a quedar, dele, póngalo, sí, en teoría sí, pero, ah, pues sí, salió pando [la recta trazada con la regla no salió continua (ver figura 94)], [APa2: Coloque un puntito acá; refiere a colocar un punto en el lado del ángulo de 45 grados para mantener la abertura (ver figura 95)], no, deslícelo ahí, ese está bueno, pero el otro está malo. Es con el de 60, no, pero aquí no le puso el de 45, pues [APa2: Sí, este tiene 45], pero este es el otro, es que ese es el rollo, este era [solicitan cuerdas y usan la regla esférica como una recta completa (ver figura 95)]". Figura 95. El equipo A traza un punto para mantener la abertura de un ángulo. Fuente: Fotografía-sesión 3.	Colocan un punto en uno de los lados del ángulo de 45 grados, para mantener la abertura.	Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. **Ángulo compuesto** por dos rectas que se intersecan en un punto [P y E]. El ángulo como **elemento compositor** de un triángulo [P y E].
	Experimentan y notan: E-construyeron un triángulo con un ángulo recto y un obtuso;	V-BP1-S3|1:11:14-1:12:24|: "Ah bueno, de los lados siempre se mantiene que son infinitos, pero lo justificamos con respecto a los ángulos, nosotros teníamos este segmento fijo, ahorita que se acaba de ir usted estaba viendo lo de los ángulos de 180, de que los triángulos en el plano se cumplen las propiedades de que los tres suman 180, pero	Justifican la infinitud de los triángulos por la medida de los ángulos. Especifican que la suma de los ángulos internos de un triángulo plano es 180 grados.	Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P].

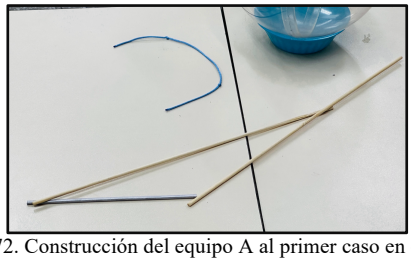
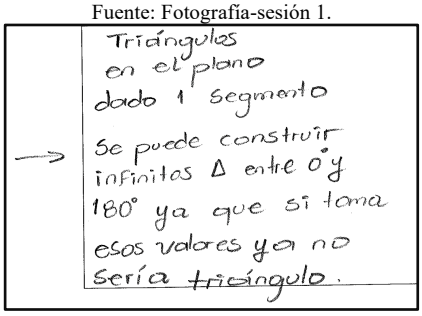
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	construyeron un triángulo birrectángulo; en los casos en que se construyen infinitos triángulos se muestran con solo cambiar la medida de uno de sus elementos no fijos; al cambiar la medida de un ángulo también cambia el segmento opuesto y viceversa; en los caso en que se construye un único triángulo, los tres elementos fijos fijan a los demás; si hay un ángulo de 90 grados uno de esos lados pasa por el polo del otro.	entonces se nos ocurrió marcar dos perpendiculares, como los meridianos que pasan por la circunferencia máxima, por donde pasaría el segmento fijo, entonces trazamos la perpendicular y se tocan en un punto, este punto sería el polo, pero este ángulo si es perpendicular sería de 90, este de 90, entonces entre los dos sumarían 180, pero qué pasa con este ángulo [señala el tercer ángulo], entonces ahí la propiedad no se cumple". V-BP1-S3|3:14:21-3:16:16|: "Y ahora el de 150, sí se puede, 150 y 60, si lo pongo acá [BPa3: Ahh es cierto], pero igual es único, aquí se va a unir, pero y si lo pongo acá [prueban colocar el ángulo de 150 en las formas AAL (ver figura 107a) y ALA (ver figura 107b)], si lo pongo acá tendría que moverlo acá [BPa2: Cuál es la fija, esta de acá, verdad, no, pero si usted lo pone acá], no va a llegar, pero aquí si funciona, o no, ¿tampoco funciona, verdad?, no, porque tiene que llegar acá, [BPa3: No, no llega], pero si lo pongo aquí sí o no [mueve el ángulo en diferentes partes del segmento no fijo para verificar en que posición el tercer lado podría coincidir], sí, [BPa2: Acá sí, porque si usted extiende este y se choca], se choca, o sea deben estar contrarios, el lado debe ser el comprendido entre los dos ángulos, porque si lo pongo acá no funciona. Mire, aunque lo ponga bien pegadito [si acerca los dos ángulos (como en la figura 107a)], este, si lo extiende, no llega acá". V-BP1-S3|3:16:18-3:16:24|: "Entonces los ángulos tienen que estar en medio de los dos, para que se forme uno".  Figura 107a. Construcción del equipo B para el caso AAL. Fuente: Fotografía-sesión 3. (T5 y T6) V-CPa1-S3|3:19:31-3:19:44|: "Hay que trazarlo con esta [CPa3: Maje no], sí, con este podemos [el IP sugiere usar la cuerda y hacer línea punteada]". Trazaron la línea usando la cuerda tensa, V-CP2-S3|3:20:40-3:21:09|: "Agarre la punta [CPa1: Ya la tengo], estírelo [toman dos cuerdas grandes y colocan en los lados no fijos (ver figura 130)], [CPa3: Ya tengo las dos puntas], ajá, ¿puede variar? No, se deforma, entonces, uno". V-CP2-S3|3:21:12-3:21:23|: "Pero aquí es de 90 otra vez [se pregunta por la medida del tercer ángulo], [CPa3: No sé, confírmelo], tendría que, matemática".	Marcaron dos ángulos rectos, sobre una recta máxima, pensando los otros dos lados como meridianos. Identifican el polo del segmento fijo por el que colocaron los ángulos rectos. Nota que no se cumple la propiedad de los ángulos interno del triángulo plano. Prueban construir un triángulo con dos ángulo, uno de 150 y uno de 60 grados. Cambian de posición los ángulos fijos. Cambian de posición los ángulos fijos. Prolongan los lados del ángulo hasta coincidir con el otro vértice. Mueve los ángulos sobre los lados no fijos. Deducen que debe estar ALA para formar el triángulo. Colocan los dos ángulos rectos en los extremos del segmento fijo. Procuran variar el tercer lado, pero notan que los elementos	Construyen un **triángulo birrectángulo** [E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Ángulo como una **cualidad dinámica** por su forma en movimiento [P y E]. El ángulo como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – perpendicularidad [P y E] Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E].

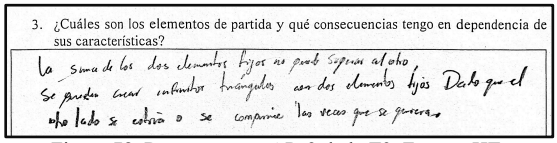
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		 Figura 130. Construcción del equipo c para el caso LAA en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.	fijos fijan a los otros elementos. Observan que construyeron un triángulo birrectángulo.	Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E].
	Establecen propiedades erróneas: P- que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo; E- los otros dos ángulos van a sumar 90 grados (porque tienen un ángulo de 90 grados); E- los dos ángulos no fijos serán congruentes correspondientemente a cuando la tercera recta estaba en la posición inicial (cambian la posición de la tercera recta como si fuera un paralelo a la posición inicial); E- el ángulo entre los lados fijos puede ser mayor que 180 grados; E-	V-AP3-S3|0:52:33-0:52:53|: "Porque esos triángulos los está formando en función a la circunferencia máxima y en este caso todos van a terminar en lo que sería el B que sería uno de los polos, en este caso, entonces, si lo hacemos en función a esa máxima con B, ahí usted podría crear infinitos triángulos", V-AP3-S3|0:53:07-0:53:20|: "Igual yo pensaba en el caso más trivial que sería usando cualquiera de los dos polos y hacer triángulos rectángulos, si yo hago ese caso trivial van a salir infinitos triángulos rectángulos", el IP pregunta: "Cuál sería el ángulo recto", V-AP3-S3|0:53:24-0:53:48|: "En que iría en función a la circunferencia máxima [segmento que interseca al segmento fijo en A, está indicando que todas las intersecciones en ese segmento son perpendiculares]… si usted lo empieza a trazar va a tener infinitos rectos, porque los está haciendo todos en función a la circunferencia máxima", el IP pregunta y estos [señala los otros dos ángulos] cuánto van a sumar si este es recto, V-APa1-S3|0:53:57-0:53:58|: "90 tienen que sumar[generalización euclidiana][AP3: 90]".	En función a un lado, trazan diferentes perpendiculares y todas coinciden en el vértice B que sería el polo del lado. Notan que pueden construir infinitos triángulos. Toman ese caso como un caso base, usando los polos de uno de los lados, construyen infinitos triángulos rectángulos. Fijan ángulos rectos en función de una recta esférica y el segmento fijo. Establecen, erróneamente, que si un triángulo tiene un ángulo recto, los otros dos van a sumar 90 grados.	Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – perpendicularidad [P y E] Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E].
		El equipo C seleccionó un ángulo recto; como los lados pueden cambiar de medida, los representaron con cuerdas tensas (ver figura 115). (T1) El IP pregunta si se puede decir algo de los otros elementos conociendo el ángulo de partida, el V-CP2-S3|1:02:44-0:03:51|: "Los ángulos van a ser iguales [CPa3: Eso le iba a decir][IP: Cómo así], o sea, no iguales, pero independientemente de la figura que yo tenga está condicionada de que los ángulos que se están formando con la otra, con la tercera recta, es decir, estos dos de acá van a ser iguales independientemente de la longitud de la recta, si yo extiendo esta, esos ángulos van a seguir siendo los mismos [está intentando verificar que si muevo la tercera recta, como si fuera paralela a la posición inicial los dos ángulos que falta van a seguir siendo iguales como en el plano], préstenos otro [pide otro ángulo], otro ángulo de 90".	Seleccionan un ángulo recto. Construyen un triángulo rectángulo en la esfera, movilizan la tercera recta como si fueran paralelos y establecen que los dos ángulos que se forman con esa tercera recta serán congruentes en sus diferentes posiciones [basicamente están diciendo que el V postulado de euclides se cumple en la esfera]. Solicitan otro ángulo recto para verificar si pueden construir un triángulo birrectángulo.	Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – paralelismo [P] Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	cuando tengan tres ángulos también van a construir infinitos triángulos.	 Figura 115. Construcción del equipo C para un ángulo fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.		
	Establecen propiedades: E-los ángulos también están limitados, pero no están seguros hasta donde; P y E - en el plano, dos ángulos fijan el tercer ángulo, pero en la esfera no; P y E – en los casos en que se construye un solo triángulo, esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; E- se tiene un nuevo criterio de congruencia de triángulos, AAA; P- la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180 grados; E- la suma de los	(T6) V-BP1-S3|2:35:07-2:36:15|: "Pero parece que son perpendiculares ustedes [BPa3: Sí], será que estas van al polo, porque yo estoy manteniendo este segmento fijo y este también fijo, pero miren si yo lo pongo acá, se pueden formar infinitos triángulos. Miren, ahh no, [BPa2: Este hay que considerarlo también, porque está fijo el de abajo], ahh es cierto, [BPa2: El de abajo también es fijo], es cierto, estoy formando este triángulo, este está fijo, pero este también, pero no llegan a formar acá, es cierto, solo es uno". V-BP1-S3|3:11:13-3:11:08|: "Uno. Intentamos hacer esto primero, entonces nos dimos cuenta de que solo se formaba uno, pero este lado que no sabemos cuánto es, entonces podríamos colocarlo acá, así, pero nos dábamos cuenta de eso, que podemos colocarlo acá, pero el tercer lado no va a formar el triángulo con este porque este es fijo, entonces solo puede estar moviendo el ángulo [sin cambiar la medida del ángulo, lo mueve por el lado no fijo], hasta que se encuentran [prueba colocar los elementos de diferentes formas: AAL, ALA, LAA]", el IP les dice además que este ángulo es fijo [el tercer ángulo], V-BP1-S3|3:11:51-3:11:55|: "Sí, por la suma de los tres ángulos tiene que ser fija". el V-BP1-S3|3:33:02-3:33:10|: "Se cumple, pero para ciertos casos [IP: ¿Para qué casos no se cumple?], para el caso del último AAA. A diferencia en cuanto al plano, hay infinitos triángulos y en la esfera uno nada más y, por lo que decía el compañero [menciona a CP2], que los ángulos, los tres ángulos se pueden mantener, pero los triángulos pueden hacerse más amplios [hace un triángulo con sus manos y lo amplía (ver figura 108)], como hacerle un zoom, pero ya no, o sea, teniendo solamente esos tres elementos, no implica que el otro triángulo va a ser igual". V-CP2-S3|1:04:06-0:04:24|: "Pero van a ser mayores, van a ser mayores que 90 [refiere a los ángulos restantes], mientras que en el caso del triángulo solo pueden tener un ángulo de 90. Aquí los otros dos; sabemos que la suma de los ángulos	Notan que construyeron rectas perpendiculares, por lo que se cuestionan el polo de alguna de ellas, porque fijan un segmento y un ángulo recto. Movilizan el ángulo recto sobre una recta formando infinitos triángulos birrecctángulos. Nota que los elementos fijos fijan a los otros elementos. Cambian los elementos de posiciones. Cambian la medida de uno de los ángulos no fijos. Describen que por la suma de los ángulos internos del triángulo plano se forma un solo triángulo. Notan una diferencia con el caso AAA, en el plano de forman infinitos triángulos pero en la esfera solo uno. Notan que en la esfera, si tienen un ángulo de 90 grados grados los otros dos van a ser mayores de 90 grados.	Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – perpendicularidad [P y E] El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Ángulo como una **cualidad dinámica** por su forma en movimiento [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Construyen un **triángulo trirrectángulo** [E]. **Tres ángulos fijos construyen un único triángulo** [E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados; al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia; P- un triángulo solo puede tener un ángulo recto;	[CPa1: Aquí la suma de los ángulos internos de un triángulo no van a ser 180] va a ser mayor que 180". El IP pide más ejemplos de triángulos y les pregunta si sus ángulos internos suman más de 180 grados; el equipo está de acuerdo en que sí, suman más de 180 grados. V-CPa1-S3|1:06:15-1:06:22|: "Los ángulos del triángulo en la esfera no van a tener la misma medida", V-CPa1-S3|1:06:45-1:06:56|: "Yo diría eso, en el triángulo los ángulos no van a sumar la misma medida, en el plano tienen que medir 180, pero acá no", V-CP2-S3|1:07:30-0:07:54|: "Como lo explico, la suma va a ser mayor que 180, sí, porque si ustedes se fijan aquí tenemos 90, se supone que solo debería de haber un ángulo de 90, pero aquí tenemos uno mayor de 90 [tiene un ángulo de 90 grado y un otro obtuso y aun así forman un triángulo en la esfera], y acá tenemos [refiere al tercer ángulo], ya con eso es mayor que 90, ya tenemos que la suma de los ángulos va a ser mayor que 180", V-CPa1-S3|2:43:31-2:43:17|: "Pero moviendo los lados se van a mover los ángulos, [CP2: No, porque si yo los voy deslizando]", el V-CP2-S3|2:43:37-2:43:41|: "Ah, pero mira, la otra cambia, la fija cambia, un triángulo". V-CP2-S3|2:43:46-2:44:02|: "Tenemos esto acá, si mueve, por ejemplo, si yo muevo, va cambiando este [en la figura 126 se ve como forma un triángulo con dos ángulos rectos, pero el tercero se hace obtuso]". El IP: "Este ángulo de acá sigue midiendo 90 grados", la V-CPa3-S3|2:44:09-2:44:15|: "No [CP2: No, cambia], [CPa1: Entonces solo sería uno]", V-CP2-S3|2:44:19-2:44:21|: "Entonces sería un triángulo equiángulo". V-CPa3-S3|2:44:37-2:44:40|: "Nosotros tenemos condicionados los tres", V-CPa3-S3|2:45:15-2:45:19|: "Con esos tres ángulos, solo se forma uno [CP2: Ajá, uno]", V-CP2-S3|2:45:21-2:45:44|: "Sí, porque si usted se fija, esto cambia. Mueva este para acá, ahí, y ahí sí se formaría uno nada más y volvería a tener, que sería desde el polo a la circunferencia, a la circunferencia mayor", V-CP2-S3|2:45:56-2:46:00|: "Si usted se fija, tenemos un diámetro; este va a llegar hasta el polo prácticamente", el IP: "¿Por qué llega al polo?", V-CP2-S3|2:46:14-2:46:45|: "Supongamos que llega al polo, [IP: ¿por qué?], [CPa1: Porque es en ángulo recto], …, ajá. Entonces solo formaría uno". el V-CP2-S3|3:34:16-3:34:54|: "Igual que [menciona a BP1], en el plano vimos lo de los ángulos, pero en la esfera sí [IP: En la esfera vieron los cuatro casos], sí".	Establecen que en el plano los triángulos solo pueden tener un ángulo recto. Establecen la diferencia en los ángulos internos de los triángulos planos y esféricos. Establecen que la medida de los ángulos internos del triángulo esferico no es constante. Establecen la diferencia en los ángulos internos de los triángulos planos y esféricos. Forman un triángulo con un ángulo de 90 y un obtuso, por lo que reconocen que los ángulos suman más de 180 grados. Mueven los lados para cambiar la medida de los ángulos. Construyen un triángulo con tres ángulos rectos. Señalan que tiene los tres ángulos rectos fijos, y con ello, construyen un único triángulo. Por lo que reconocen que los vértices son los polos de los lados opuesto y que los lados son radios de una circunferencia máxima, es decir, que miden un cuadrante o cuarto de circunferencia máxima.	Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Los triángulos **solo pueden tener un ángulo recto** [P]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Construyen un **triángulo obtusángulo-rectángulo** [E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Construyen un **triángulo trirrectángulo** [E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E].
	Reconocen que pueden cambiar la	V-AP3-S3|0:21:12-0:21:34|: "Pero lo que me pregunto es, hay infinitos obtusos, hay solo un recto, hay infinitos obtusos, hay infinitos agudos, porque	Clasifican los ángulos según su medida.	Medida del ángulo como **criterio de clasificación** [P y E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	abertura de los ángulos en grados enteros y decimales.	usted puede formar un ángulo 6.1, 6.2, 6.3, 6.35 [su construcción se puede ver en la figura 72]", V-APa1-S3|0:21:31-0:21:32|: "Y contarlos como no", V-AP3-S3|0:22:34-0:23:04|: "Tengo una consulta [le pregunta al IP], no sé si serían, o sea según la deducción creo que son infinitos triángulos porque lo que pensaba yo es, eh si uno de los lados está por ejemplo a 15.3 grados entonces usted puede 15.35, 15.36 y ya es otro, ya va aumentando, entonces, entre 0 y 180 habría infinitos triángulos que se podrían formar, pero siento que me pide un número específico, pero no sé". El IP: "¿Este ángulo puede variar?, ¿hasta dónde puede variar?", V-AP3-S3|0:23:21-0:23:53|: "Hasta antes de 180… claro, infinitos".	Cambian la medida de los ángulos en grados enteros y decimales. Siempre que un ángulo podía cambiar de medida se formaban infinitos triángulos por la medida de su variación en decimales. Por lo que deducen que pueden construir infinitos triángulos. Limitan la medida de uno de los ángulos debe ser menor que 180 grados.	Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. El ángulo como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Ángulo de 180 grados como **referente de medida** de ángulos [P y E].
	Recta y segmento de recta plano y esférico			
En las actividades	Reconocer que en ese caso (un segmento fijo en el plano y esfera) se pueden construir infinitos triángulos. Establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento fijo en el plano y la esfera).	V-AP3-S3|0:21:12-0:21:34|: "Pero lo que me pregunto es, hay infinitos obtusos, hay solo un recto, hay infinitos obtusos, hay infinitos agudos, porque usted puede formar un ángulo 6.1, 6.2, 6.3, 6.35 [su construcción se puede ver en la figura 72]", V-APa1-S3|0:21:31-0:21:32|: "Y contarlos como no", V-APa2-S3|0:21:35-0:21:36|: "Clasificarlos sí", V-APa1-S3|0:21:38-0:21:39|: "El que no se podría formar es el equilátero", V-AP3-S3|0:21:42-0:21:45|: "Sí se puede, sí porque se pueden sobreponer", V-APa1-S3|0:22:00-0:22:02|: "Cuántos podríamos hacer", V-AP3-S3|0:22:04-0:22:31|: "Buena pregunta, no sé si serían infinitos, ese no puede ser igual a 180 y este no puede ser igual a cero [APa1: Todos los triángulos que estén entre], 0 y 180 [APa1: Que no incluye ni a cero y ni a 180][esto APa1 lo hace explícito en sus HT (ver figura 73)], entonces serían, eso es lo que no sé si serían infinitos", V-AP3-S3|0:22:34-0:23:04|: "Tengo una consulta [le pregunta al IP], no sé si serían, o sea según la deducción creo que son infinitos triángulos porque lo que pensaba yo es, eh si uno de los lados está por ejemplo a 15.3 grados entonces usted puede 15.35, 15.36 y ya es otro, ya va aumentando, entonces, entre 0 y 180 habría infinitos triángulos que se podrían formar, pero siento que me pide un número específico, pero no sé". El IP le dice que no necesariamente se pide un número específico, dado que los ángulos pueden cambiar de medida. Estos no necesariamente cambiarán de medida en unidades enteras; también pueden cambiar en decimales. El IP: "¿Este ángulo puede variar?, ¿hasta dónde puede variar?", V-AP3-S3|0:23:21-0:23:53|: "Hasta antes de 180… claro, infinitos".	A-B- Seleccionan un elemento de un triángulo [A-lado, B-lado]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias; prolongan y acortan la medida de los segmentos no fijos; establecen, erróneamente, que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo. Exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los lados de un triángulos esférico son geodésicas); trazan el segmento fijo; nombran sus extremos como punto A y B; construyen un segmento perpendicular al segmento fijo en el punto A; prolongan y acortan la medida de los lados no fijos; trasladan el ángulo recto en la circunferencia perpendicular al segmento fijo. Establecen, erróneamente, que pueden ser triángulos finitos porque las rectas son finitas; trazan tres rectas esféricas; reconocen que se forman dos triángulos opuestos; trazan dos perpendiculares en los extremos del segmento fijo; exponen que esas perpendiculares se intersecan en el polo del segmento fijo [teoría de la polaridad].	Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. El segmento **tiene extremos** [P y E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. **Recta finita-ilimitada** [E]. **Tres rectas esféricas forman dos triángulos** [E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. **Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como catetos e hipotesusas de triángulos rectángulos [E]. **Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima**

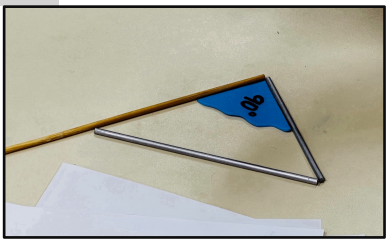
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		 Figura 72. Construcción del equipo A al primer caso en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 1.  Figura 73. APa1 describe los casos en los que no se construye un triángulo. Fuente: HT. En la DG, después de la respuesta de BP1, se preguntó al equipo A si habían llegado a esa misma conclusión, V-AP3-S3|0:35:25-0:35:53|: "Sí, solo que igual con los ángulos, que al buscar los ángulos de 180, puedes mover esos dos lados, en función a, por ejemplo, 15.3, y ese 15.3 a 15.35, 36, 37; entonces vendría siendo, podría formar infinitos triángulos entre 0 y 180". V-AP3-S3|0:53:24-0:53:48|: "En que iría en función a la circunferencia máxima [segmento que interseca al segmento fijo en A, está indicando que todas las interseccionesen ese segmento son perpendiculares]… si usted lo empieza a trazar va a tener infinitos rectos, porque los está haciendo todos en función a la circunferencia máxima", el IP pregunta y estos [señala los otros dos ángulos] cuánto van a sumar si este es recto, V-APa1-S3|0:53:57-0:53:58|: "90 tienen que sumar[generalización euclidiana][AP3: 90]". En la DG, al preguntar cuántos triángulos diferentes se pueden construir en la esfera dado un segmento fijo, la V-APa1-S3|1:10:33-1:10:34|: "Infinitos", el V-AP3-S3|1:10:35-1:11:48|: "Infinitos también, igual al momento en el que yo hago los triángulos en función a la circunferencia máxima; si yo muevo los ángulos, de manera perpendicular se forman infinitos triángulos". El V-BP1-S3|0:27:31-0:28:15|: "Es que este lado está fijo, este es el elemento fijo, pero la pregunta es cuántos triángulos diferentes se pueden construir en el plano y hay infinitas opciones ahí, o sea, el ángulo se ve limitado… el porqué". En la DG, el V-BP1-S3|0:34:24-0:35:23|: "Bueno, dado un segmento fijo,		como radio de círcunferencia máxima [E].

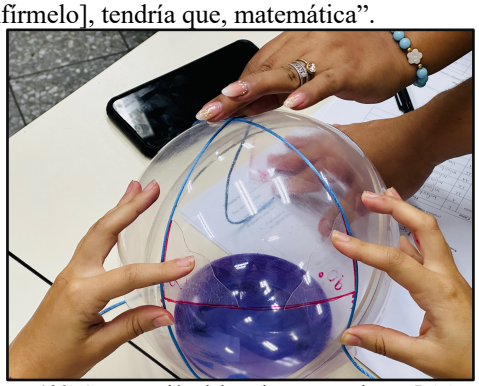
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		nos dábamos cuenta de que estos dos lados podrían moverse tanto como quisiéramos, hacia un lado o hacia otro. Los lados no se ven limitados, porque los lados se pueden extender tanto como nosotros queramos; los que se ven limitados son los ángulos, porque el ángulo puede ser obtuso, pero hasta cierta medida, hasta cierto punto, porque si ya se forma, si se llega a formar un ángulo de 180 grados, ya se pierde la composición de lo que es un triángulo, entonces, ya no se puede formar un triángulo. Pero, dado este segmento, se pueden formar infinitos triángulos". V-BP1-S3|1:11:14-1:12:24|: "Ah bueno, de los lados siempre se mantiene que son infinitos, pero lo justificamos con respecto a los ángulos, nosotros teníamos este segmento fijo, ahorita que se acaba de ir usted estaba viendo lo de los ángulos de 180, de que los triángulos en el plano se cumplen las propiedades de que los tres suman 180, pero entonces se nos ocurrió marcar dos perpendiculares, como los meridianos que pasan por la circunferencia máxima, por donde pasaría el segmento fijo, entonces trazamos la perpendicular y se tocan en un punto, este punto sería el polo, pero este ángulo si es perpendicular sería de 90, este de 90, entonces entre los dos sumarían 180, pero qué pasa con este ángulo [señala el tercer ángulo], entonces ahí la propiedad no se cumple".		
	Reconocer que en ese caso (dos segmentos fijos en el plano y la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. Establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (dos segmentos fijos en el plano y la esfera).	El IP pregunta si puede ser mayor, APa1-S3|1:32:39-1:32:40|: "No", AP3-S3|1:32:40-1:32:50|: "No sí, mayor puede ser esta [el IP aclara que se puede prolongar, pero siempre formando un triángulo], ahh no", AP3-S3|1:32:55-1:32:56|: "Está condicionado a esos dos". El IP: "Cuántos triángulos se pueden formar", AP3-S3|1:33:22-1:33:23|: "Infinitos también". APa2 describe la desigualdad triangular y justifica la infinitud de los triángulos por el cambio, extenderse o comprimirse, del lado restante (ver figura 78).  3. ¿Cuáles son los elementos de partida y qué consecuencias tengo en dependencia de sus características? La suma de los dos elementos fijos no puede superar al otro Se pueden crear infinitos triángulos con dos elementos fijos Dado que el otro lado se estira o se comprime las veces que se genera Figura 78. Respuesta por APa2 de la T3. Fuente: HT. AP3-S3|2:03:00-2:03:47|: "Igual tenemos que son infinitos, la observación que hacíamos a [menciona el nombre del IP] es que, en el plano, pues igual son infinitos, pero estamos limitados al la composición del triángulo porque se pueden hacer hasta 180, pero en la esfera en este caso no porque digamos si usted lo tiene así y después lo quiere hacer así [toma los palillos y hace la muestra (ver figura 84)], pero no está limitado a la medida del ángulo, sino a la medida	A-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y lado); prolongan y acortan el tercer lado; condicionan la prolongación del tercer lado del triángulo; suman los dos segmentos fijos; comparan la suma de los dos elementos fijos con la medida del tercer lado; establecen que el tercer lado no puede ser mayor que la suma de los dos fijos; mantienen la forma triangular condicionando el ángulo entre los lados fijos y el tercer lado; justifican la condición del tercer lado y de los ángulos a través de la desigualdad triangular. A-Seleccionan dos elemento de un triángulo (lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados deben ser geodésicas); trazan los segmentos fijos en la esfera; nombran sus vértices A, B y C; trasladan la estrategia del	Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad dinámica** [P y E]. Segmento como una **cualidad estática** [P y E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E]. Segmento **compuesto por segmentos** [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E].

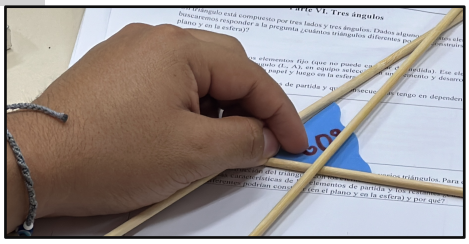
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		de la geodésica, que tiene que ser el menor segmento, se puede formar este de acá [señala la geodésica del tercer lado] o se puede formar este de acá [señala el segmento más largo], pero este ya no sería un triángulo en la esfera, entonces, son infinitos, pero están limitados por la geodésica, tienen que ser a fuerza geodésicas para que sea un triángulo".	plano a la esfera; exponen que con solo cambiar uno de los elementos se muestran infinitos triángulos.	Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. El segmento **tiene extremos** [P y E].
	Reconocer que en ese caso (un ángulo y un segmento fijo en el plano y la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. Establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento y un ángulo fijos en el plano y esfera).	el V-BP1-S3|1:40:40-1:40:43|: "Infinitos, siempre siguen siendo infinitos". V-BPa3-S3|1:41:00-1:41:01|: "Este es el ángulo, ¿verdad?", V-BPa2-S3|1:41:01-1:41:02|: "No, ese es cuando fijemos tres; ahorita solo estamos fijando dos", V-BP1-S3|1:41:22-1:41:34|: "A nosotros nos toca lado y ángulo… este está condicionado, si lo tengo así, ¿verdad?, este tiene que ser mayor a este, porque si es igual ya no se puede", V-BPa2-S3|1:41:35-1:41:45|: "No, es mentira porque [BPa3: Dejaría de ser] si es igual, sería isósceles [BPa3: Dejaría de ser]", V-BP1-S3|1:41:45-1:41:56|: "Es que sí, puede ser igual, pero mire, ya, este ángulo ya no se mantiene [APa3: Exacto]". V-BP1-S3|1:50:23-1:50:35|: "Hay que poner eso, porque la graduación del segundo ángulo y con el tercer segmento", la V-BPa2-S3|1:50:51-1:50:53|: "Porque la graduación puede variar tanto como queramos". En la DG, V-BP1-S3|2:02:28-2:02:51|: "De igual forma se forman infinitos triángulos, al mantener un ángulo y un lado fijo; en la otra contraparte del otro lado, el ángulo puede ir variando tanto como quiera, y encontrarse con el otro lado e ir formando infinitos triángulos".	B-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y ángulo recto); prolonga y acortan los segmentos no fijos; establecen que la hipotenusa debe ser siempre mayor que el segmento fijo (está de cateto); condicionan la medida de segmentos y ángulos. B-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados son geodésicas); trazan el segmento fijo en la esfera; prolonga y acortan los segmentos no fijos; notan que al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia; condicionan el cambio de medida de un segmento al cambio de medida del ángulo opuesto.	Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad dinámica** [P y E]. El **segmento condicionado** (por ser la hipotenusa debe ser más grande que los otros dos] [P]. Segmento **condicionador** [P y E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento **condicionado** (por la variación el ángulo opuesto) [P y E].
	Establecer que el tercer lado no puede ser mayor que la suma de los dos fijos (desigualdad triangular en el plano y en la esfera).	APa1-S3|1:32:13-1:30:28|: "Si lo pone así, ahí son 180, digamos, tendría que abarcar de vértice a vértice [refiere a la suma de los dos fijos (ver figura 76)], como la misma, que la suma de estas dos tendría que ser [refiere a la desigualdad triangular, la cual menciona explícitamente en sus HT (ver figura 77)]". El IP pregunta si puede ser mayor, APa1-S3|1:32:39-1:32:40|: "No", AP3-S3|1:32:40-1:32:50|: "No sí, mayor puede ser esta [el IP aclara que se puede prolongar, pero siempre formando un triángulo], ahh no", AP3-S3|1:32:55-1:32:56|: "Está condicionado a esos dos". El IP: "Cuántos triángulos	A- Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y lado); prolongan y acortan el tercer lado; condicionan la prolongación del tercer lado del triángulo; suman los dos segmentos fijos; comparan la suma de los dos elementos fijos con la medida del tercer lado. A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); comparan los segmentos y deducen que todos son desiguales; exponen que los lados de	Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad dinámica** [P y E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		se pueden formar", AP3-S3|1:33:22-1:33:23|: "Infinitos también". Figura 76. APa1 muestra la desigualdad triangular en el plano. Fuente: Video-sesión 3. APa1-S3|2:22:30-2:23:00|: "Solo uno [refiere a la cantidad de triángulos], sí, porque igual tiene que ser geodésicas, porque se puede hacer aquí como dice él, pero no… yo creo que en el fondo deben ser las magnitudes, [APa2: No necesariamente], pero igual como estábamos hablando de la desigualdad triangular…, la suma de estos dos debe ser mayor que este", APa1-S3|2:23:14-2:23:54|: "La suma de estos dos debe ser mayor que este, la suma de estos dos debe ser mayor que la longitud de este al igual que, si me entienden, porque por ejemplo [menciona a APa2], usted los pusimos al azar, como que lo fuimos midiendo para que marcara punto a punto… se debe descubrir creo yo la desigualdad triangular, solo uno, sí, pero como se forma, dado la desigualdad triangular", APa1 reconoce cada lado en la esfera y luego los coloca en el plano [como cuerdas tensas] para verificar la desigualdad triangular (ver figura 90). El AP3-S3|2:24:04-2:24:11|: "Siento que tiene sentido porque al ser en la esfera". Figura 90. APa1 verifica la desigualdad triangular para triángulos esféricos. Fuente: Video-sesión 3.	esos triángulos deben ser geodésicas; trasfieren la idea de la desigualdad triangular del plano a la esfera; pasan los segmentos esféricos al plano, tensando las cuerdas en el plano; suman dos segmentos esféricos; comparan la suma de dos segmentos con el tercer lado; notan que en la esfera se cumple la desigualdad triangular.	El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E]. Segmento **compuesto por segmentos** [P y E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento **como una cuerda tensa** [P y E]. El **segmento condicionador** [P y E]. **Relación entre segmentos – desigualdad triangular** [P y E].
	Admitir que existen regiones formadas por tres segmentos de recta que no son triángulos.	V-BPa3-S3|1:49:50-1:49:51|: "¿Qué es la geodésica?", V-BP1-S3|1:49:58-1:50:14|: "Es la distancia mínima entre dos puntos, la distancia mínima entre los dos puntos en la esfera, pero en el plano, aquí yo tengo dos puntos y la distancia mínima en la recta, porque puedo tener este, pero no es la distancia mínima". V-BPa3-S3|1:50:21-1:50:22|: "Entonces, a la conclusión a la que llegamos, es lo que dijo usted". V-BP1-S3|1:50:23-1:50:35|: "Hay que poner eso, porque la graduación del segundo ángulo y con el tercer segmento", la V-	A-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados deben ser geodésicas); identifican las geodésicas que se forman entre los tres vértices. B-Seleccionan dos elemento de un triángulo (lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados son	Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento de recta que no representa la distancia

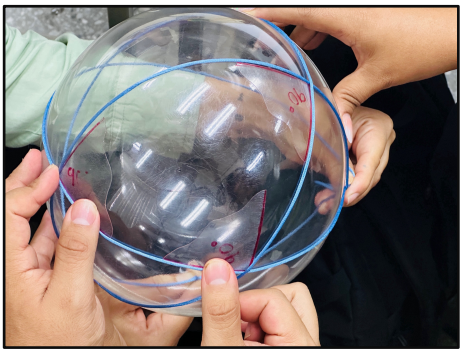
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		BPa2-S3|1:50:51-1:50:53|: "Porque la graduación puede variar tanto como queramos".	geodésicas); cuestionan el significado de geodésica; identifican segmentos de recta que no son geodésicas.	menor entre dos puntos- **segmentos de recta que no son geodésicas** [E].
	Reconocer que en ese caso (tres lados fijos en el plano y en la esfera) se puede construir solo un triángulo. Establecer una estrategia de construcción geométrica.	(T5) El IP: "Dados esos tres lados fijos, de partida, ¿puedo decir algo de los ángulos?", el AP3-S3|2:17:45-2:17:46|: "Están fijos también [APa1: Están fijos]", el IP: "¿Por qué?", APa1-S3|2:17:51-2:17:56|: "Porque los lados no se pueden mover, no tienen movilidad". El IP: "Su triángulo pareciera que es equilátero, ¿lo es o no? [Porque seleccionaron lados casi del mismo tamaño]". El AP3-S3|2:18:05-2:18:07|: "No, son diferentes". (T6) El IP: "Entonces, ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir?", el AP3-S3|2:18:13-2:18:13|: "Uno", APa1-S3|2:18:14-2:18:16|: "Si tengo los tres lados fijos". Figura 85. APa2 construye un único triángulo dado los tres lados fijos. Fuente: Video-sesión 3. APa1-S3|2:22:22-2:22:23|: "Entonces solo se puede formar uno", el AP3-S3|2:22:23-2:20:26|: "Ahora los tres lados son fijos", APa1-S3|2:22:30-2:23:00|: "Solo uno [refiere a la cantidad de triángulos], sí, porque igual tiene que ser geodésicas, porque se puede hacer aquí como dice él, pero no… yo creo que en el fondo deben ser las magnitudes, [APa2: No necesariamente], pero igual como estábamos hablando de la desigualdad triangular…, la suma de estos dos debe ser mayor que este".	A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); notan que, al cambiar la abertura del ángulo, los lados no se mantienen; observan que los tres lados fijos fijan los tres ángulos internos. A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y lado); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (comparan los segmentos y deducen que todos son desiguales); coinciden los extremos de los segmentos; sobreponen los tres segmentos en la superficie de la esfera al mismo tiempo; tesan la cuerda para representar segmentos esféricos; trazan en la esfera el segmento más largo; nombran los extremos del segmento, A y B; sobreponen y tensan las cuerdas que representan los otros segmentos; trazan en la esfera los otros dos segmentos; verifican que los trazos son rectos (sobreponiendo las cuerdas tensan); exponen que los tres lados fijos fijan los tres ángulos.	Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad estática** [P y E]. Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. Segmento **condicionado** (por la variación el ángulo opuesto) [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E]. El segmento **tiene extremos** [P y E]. Segmento **como una cuerda tensa** [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E].
	Reconocer que en ese caso (dos lados y un ángulo fijo en el plano y esfera) se puede construir solo un triángulo.	EL IP: "Dado esos elementos que tienen de partida, ¿qué podemos decir de los otros elementos?", el V-BP1-S3|2:28:24-2:29:05|: "Bueno, los otros, dado que este mide 90, lo mismo, que estos tienen que ser complementarios [que los otros dos ángulos deben sumar 90 grados]. Este segmento [el tercero], ya se ve delimitado, tiene que tener una medida exacta para formar el triángulo, porque si ya lo hago más, o sea, esta sería la medida exacta para formar el triángulo, que si mide más, ya no; si mide menos,	B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y ángulo); prueban formar el triángulo colocando los elementos ALL, LAL, y LLA; establecen que el ángulo debe estar entre los dos lados fijos o después de los dos lados; notan que en esas condiciones el tercer lado está limitado; establecen que esos elementos fijos	Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad dinámica** [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E]. Segmento **condicionado** [P y E].

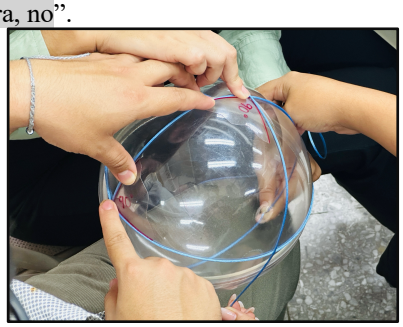
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Establecer una estrategia de construcción geométrica.	tampoco, entonces la longitud del tercero estaría condicionada".  Figura 105. Construcción del equipo B para el caso LLA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3. (T6) El IP: "Me está diciendo que solo se puede construir un triángulo", V-BP1-S3|2:29:12-2:29:18|: "Sí, porque si lo pongo en medio de estos dos también solo se puede formar uno", V-BPa2-S3|2:29:29-2:29:37|: "Es cierto, al principio decía que se podían formar más, pero me acordé después que estos dos estaban fijos y es cierto, por eso solo se puede formar uno". V-BP1-S3|2:51:18-2:52:17|: "Bueno, en el plano nos dimos cuenta que podíamos colocar ese ángulo entre los dos lados o podríamos colocarlo y en el exterior del otro lado, pero de igual forma probamos que el tercer lado se veía condicionado; o sea, la longitud del tercer lado estaría condicionada por lo que solo se podría formar un triángulo, eso en el plano. De igual forma, en la esfera, los dos segmentos que formamos eran geodésicas y también corroboramos colocar el ángulo entre los dos segmentos y en la parte superior del otro segmento [refiere al extremo de uno de ellos], y también la tercera geodésica era única, entonces era única la otra, entonces solo se podía formar un triángulo".	condicionan o fijan los otros elementos. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados deben ser geodésicas); trazan los segmentos fijos en la esfera; prueban organizar sus elementos de las tres formas posibles: ALL, LAL, LLA; cambian la medida de un lado fijo, por lo que deducen (erróneamente) que pueden construir infinitos triángulos; notan que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; notan que se forma un ángulo de 90 grados, por lo que deducen que uno de los lados de ese ángulo puede pasar por el polo del otro lado (teoría de la polaridad y relación divergencia-convergencia).	Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. El segmento **es un elemento compositor** (compone ángulos) [P, E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. **Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como radio de círcunferencia máxima [E].
	Reconocer que en ese caso (LAA fijos en el plano y esfera) se puede construir solo un triángulo. Establecer una estrategia de construcción geométrica.	AP3-S3|3:02:00-3:02:02|: "Un lado, ángulo, ángulo", APa1-S3|3:02:05-3:02:07|: "Un lado fijo y dos ángulos", AP3-S3|3:02:33-3:02:40|: "90, es un rectángulo, igual solo se puede formar uno [la APa2 y el AP3 hacen la construcción de la figura 92]", V-APa2-S3|3:02:41-3:02:43|: "Sí porque están condicionados [refiere al resto de los elementos]". APa1-S3|3:07:46-3:07:55|: "Entonces este está fijo, este también [AP3: Y ese también, pero igual solo se puede formar uno]". En la DG, al preguntar lo que pasó en el plano y en la esfera, todo el grupo dijo que solo un triángulo. V-BPa3-S3|3:11:04-3:11:06|: "Con esos lados, solo uno", el V-BP1-S3|3:11:06-3:11:08|: "Sí, solo es uno, solo uno se puede". El IP: "cuántos en el plano", V-BP1-S3|3:11:13-3:11:08|: "Uno. Intentamos hacer esto primero, entonces nos dimos cuenta de que solo se formaba uno, pero este lado que no sabemos cuánto es, entonces podríamos colocarlo acá, así, pero nos dábamos cuenta de eso, que podemos colocarlo acá, pero el tercer lado no va a formar el	A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); procuran prolongar y acortar los lados no fijos; notan que esos elementos fijan a los elementos restantes. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); colocan los elementos en diferentes posiciones para	Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad dinámica** [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E]. Segmento **condicionado** [P y E]. Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E].

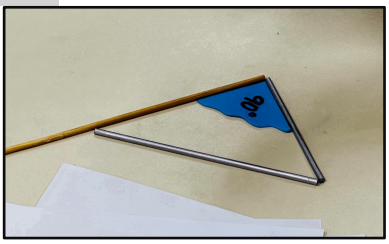
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		triángulo con este porque este es fijo, entonces solo puede estar moviendo el ángulo [sin cambiar la medida del ángulo, lo mueve por el lado no fijo], hasta que se encuentran [prueba colocar los elementos de diferentes formas: AAL, ALA, LAA]", el IP les dice además que este ángulo es fijo [el tercer ángulo], V-BP1-S3|3:11:51-3:11:55|: "Sí, por la suma de los tres ángulos tiene que ser fija". Figura 106. Construcción del equipo B para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3. V-CPa1-S3|3:16:35-3:16:36|: "Dos ángulos y un lado", V-CPa1-S3|3:16:55-3:16:59|: "Estos van a ser los fijos, estos tres", V-CPa1-S3|3:17:03-3:17:13|: "Pero estos pueden variar… [APa3: Ok, no, porque no estaría en 90]", V-CP2-S3|3:17:22-3:17:27|: "Hágalos así, [CPa1: El que, este], sí, fíjese si sigue de 90". V-CPa1-S3|3:19:31-3:19:44|: "Hay que trazarlo con esta [CPa3: Maje no], sí, con este podemos [el IP sugiere usar la cuerda y hacer línea punteada]". Trazaron la línea usando la cuerda tensa, V-CP2-S3|3:20:40-3:21:09|: "Agarre la punta [CPa1: Ya la tengo], estírelo [toman dos cuerdas grandes y colocan en los lados no fijos (ver figura 130)], [CPa3: Ya tengo las dos puntas], ajá, ¿puede variar? No, se deforma, entonces, uno". V-CP2-S3|3:21:12-3:21:23|: "Pero aquí es de 90 otra vez [se pregunta por la medida del tercer ángulo], [CPa3: No sé, confírmelo], tendría que, matemática".  Figura 130. Construcción del equipo c para el caso LAA en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.	verificar si se forma el triángulo: ALA, AAL, LAA. C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); notan que esos elementos fijan a los elementos restantes. A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); trazan el lado fijo y nombran los extremos como puntos C y D; colocan los ángulos en los extremos del segmento; mantienen el ángulo de 60 grados entre el segmento fijo y la regla esférica; tensan un cuerda que pasa por el vértice D y el punto que mantienen la abertura del ángulo de 45 grados. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo de 150 grados y ángulo de 60 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); trazan el lado fijo y nombran los extremos como puntos A y B; trazan una recta completa para tomar de ella un segmento no fijo con un ángulo de 60 grados respecto del segmento fijo; mueven el ángulo de 150 sobre la recta; prologan los lados de los ángulos e identifican sí coinciden o no con el otro lado; identifican que solo en el caso ALA se forma un triángulo. C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, dos ángulos de 90	El segmento **tiene extremos** [P y E]. El segmento **es un elemento compositor** (compone ángulos) [P, E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. Segmento **como una cuerda tensa** [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E].

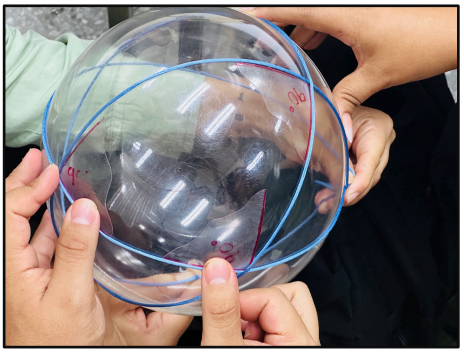
Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida, los lados deben ser geodésicas); trazan el segmento fijo; colocan los dos ángulos rectos en los extremos del segmento fijo; tensan cuerdas para representar los lados no fijos; procuran cambiar la medida de los elementos no fijos; notan que esos elementos fijan a los demás.	**Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. Segmento **como una cuerda tensa** [P y E].
Ángulo plano y esférico			
Reconocer que en ese caso (un ángulo fijo en el plano y la esfera) se pueden construir infinitos triángulos. Establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un ángulo fijo en el plano y la esfera).	V-CP2-S3|0:36:10-0:36:45|: "Que si nosotros consideramos solamente el ángulo, podríamos tener finitos triángulos en el plano, porque como es independientemente del ángulo, si ya nosotros solo estamos considerando el ángulo como algo que va a estar variando sin considerar los lados, 120 podrían formarse, pero si ya consideramos que la distancia de los lados podría variar, serían infinitos". El IP dice: "120, contando ángulos como unidades enteras, y si pensamos en la idea del AP3", el V-CP2-S3|0:36:51-0:36:52|: "Es cierto, serían infinitos".  Figura 113b. El equipo C construye un triángulo escaleno. Fuente: Fotografía-sesión 3. V-CPa1-S3|1:12:50-1:12:51|: "Igual, infinitos", el IP pregunta: "Por qué", V-CP2-S3|1:12:54-1:13:31|: "Porque como nosotros solamente tenemos un ángulo, igual como mencionaba [menciona el nombre de BP1], nosotros también observamos que, por ejemplo, la medida de todos los ángulos internos va a medir más de 180, entonces, al no limitarme a mí la medida de los ángulos internos ni tampoco la distancia, entonces, si consideramos que, por ejemplo, la medida de, considerando decimales, entonces los que se forman a partir de toda figura van a ser infinitos, puedo tener infinita cantidad".	C- Seleccionan un elemento de un triángulo [C- ángulo de 60 grados]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (los otros dos ángulos van a sumar 120 grados; uno de los otros ángulos puede ser obtuso, recto o agudo; los lados del ángulo fijo mantienen la abertura); condicionan la medida de los ángulos por la suma de los ángulos internos; consideran inicialmente solo la medida de los ángulos; modifican la medida de los ángulos no fijos, quitando o agregando un grado de uno al otro; establecen un caso extremo, el triángulo en el que los dos ángulos no fijos miden 119 y 1 grado; reconocen que pueden cambiar la medida de los ángulos en decimales. C- Seleccionan un elemento de un triángulo [C-ángulo recto]; exponen su elemento de partida y sus consecuencias (establecen, erróneamente, que el triángulo está condicionado por la medida de los ángulos internos [180 grados]); tensan cuerdas en los lados del ángulo fijo; construyen un triángulo agregando una tercera recta (opuesta al ángulo recto); cambian la posición de la tercera recta	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Medida del ángulo como **criterio de clasificación** [P y E]. Ángulo **condicionado** (por la medida de los ángulos internos de un triángulo plano) [P y E]. Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico**

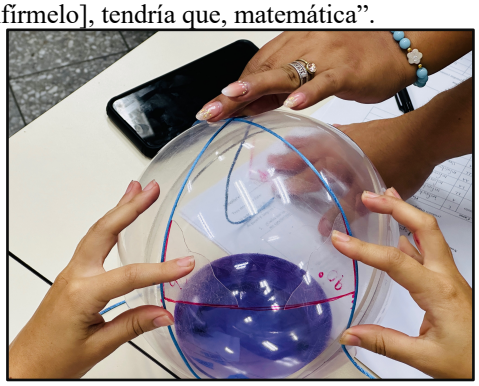
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Figura 115. Construcción del equipo C para un ángulo fijo en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.	como si fuera un paralelo a la posición inicial; establecen, erróneamente, que los dos ángulos no fijos serán congruentes correspondientemente a cuando la tercera recta estaba en la posición inicial; modifican la medida de los ángulos no fijos; observan que formaron un triángulo con un ángulo recto y un obtuso; reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados; establecen que los ángulos y los lados no están limitados y que los ángulos pueden cambiar de medida en decimales.	**suman más de 180 grados y no es constante** [E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Construyen un **triángulo obtusángulo-rectángulo** [E].
	Reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados.	V-CP2-S3|1:04:06-0:04:24|: "Pero van a ser mayores, van a ser mayores que 90 [refiere a los ángulos restantes], mientras que en el caso del triángulo solo pueden tener un ángulo de 90. Aquí los otros dos; sabemos que la suma de los ángulos [CPa1: Aquí la suma de los ángulos internos de un triángulo no van a ser 180] va a ser mayor que 180". V-CP2-S3|1:07:30-0:07:54|: "Como lo explico, la suma va a ser mayor que 180, sí, porque si ustedes se fijan aquí tenemos 90, se supone que solo debería de haber un ángulo de 90, pero aquí tenemos uno mayor de 90 [tiene un ángulo de 90 grado y un otro obtuso y aun así forman un triángulo en la esfera], y acá tenemos [refiere al tercer ángulo], ya con eso es mayor que 90, ya tenemos que la suma de los ángulos va a ser mayor que 180". V-CP2-S3|1:12:54-1:13:31|: "Porque como nosotros solamente tenemos un ángulo, igual como mencionaba [menciona el nombre de BP1], nosotros también observamos que, por ejemplo, la medida de todos los ángulos internos va a medir más de 180, entonces, al no limitarme a mí la medida de los ángulos internos ni tampoco la distancia, entonces, si consideramos que, por ejemplo, la medida de, considerando decimales, entonces los que se forman a partir de toda figura van a ser infinitos, puedo tener infinita cantidad".	B- Exponen que los ángulos internos de un triángulo en el plano suman 180 grados; cuestionan la suma de los ángulos internos de un triángulo; establecen que los ángulos también están limitados, pero no están seguros hasta donde; trazan dos perpendiculares en los extremos del segmento fijo; exponen que esas perpendiculares se intersecan en el polo del segmento fijo [teoría de la polaridad]; señalan que han construido un triángulo birrectángulo. C- Solicitan un segundo ángulo recto (pero se negó su solicitud); modifican la medida de los ángulos no fijos; observan que formaron un triángulo con un ángulo recto y un obtuso; exponen que en el plano un triángulo solo puede tener un ángulo recto. C- Seleccionan dos elementos de un triángulo (dos ángulos rectos); sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; construyen un triángulo birrectángulo.	Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Ángulo **condicionado** [P y E]. Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – perpendicularidad [P y E] El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E].

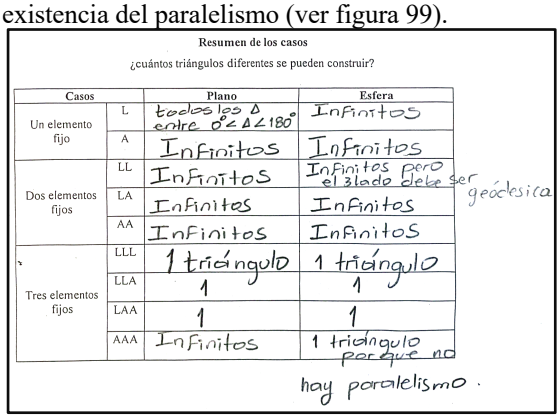
	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		 Figura 120. Construcción del equipo C para el caso AA. Fuente: Fotografía-sesión 3.  Figura 126. Deducción del triángulo único dado tres ángulos fijos en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.		Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Construyen un **triángulo obtusángulo-rectángulo** [E]. Los triángulos **solo pueden tener un ángulo recto** [P].
	Reconocer que en ese caso (un ángulo y un segmento fijo en el plano) se pueden construir infinitos triángulos. Establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (un segmento y un ángulo fijos en el plano y esfera).	el V-BP1-S3|1:40:40-1:40:43|: "Infinitos, siempre siguen siendo infinitos". V-BPa3-S3|1:41:00-1:41:01|: "Este es el ángulo, ¿verdad?", V-BPa2-S3|1:41:01-1:41:02|: "No, ese es cuando fijemos tres; ahorita solo estamos fijando dos", V-BP1-S3|1:41:22-1:41:34|: "A nosotros nos toca lado y ángulo… este está condicionado, si lo tengo así, ¿verdad?, este tiene que ser mayor a este, porque si es igual ya no se puede", V-BPa2-S3|1:41:35-1:41:45|: "No, es mentira porque [BPa3: Dejaría de ser] si es igual, sería isósceles [BPa3: Dejaría de ser]", V-BP1-S3|1:41:45-1:41:56|: "Es que sí, puede ser igual, pero mire, ya, este ángulo ya no se mantiene [APa3: Exacto]". V-BP1-S3|1:50:23-1:50:35|: "Hay que poner eso, porque la graduación del segundo ángulo y con el tercer segmento", la V-BPa2-S3|1:50:51-1:50:53|: "Porque la graduación puede variar tanto como queramos". En la DG, V-BP1-S3|2:02:28-2:02:51|: "De igual forma se forman infinitos triángulos, al mantener un ángulo y un lado fijo; en la otra contraparte del otro lado, el ángulo puede ir variando tanto como quiera, y encontrarse con el otro lado e ir formando infinitos triángulos".	B-Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y ángulo recto); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo del otro extremo no puede ser recto ni obtuso, los otros dos ángulos son complementarios); modifican la abertura del ángulo que está al otro extremo del segmento fijo; condicionan la medida de segmentos y ángulos. B- Seleccionan dos elementos de un triángulo (lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el ángulo que está al otro extremo del segmento fijo puede ser agudo, recto u obtuso); trazan el segmento fijo y el ángulo en la esfera; modifican la abertura del ángulo que estaría en el otro extremos del segmento fijo; condicionan, erróneamente, la medida de los ángulos internos a 180 grados; nombran los ángulos de los triángulos como: primero,	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Medida del ángulo como **criterio de clasificación** [P y E]. **Relacion entre ángulos – complementarios** [P y E]. Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Reconocer que en ese caso (dos ángulos fijos en el plano y esfera) se pueden construir infinitos triángulos. establecer una estrategia de construcción geométrica para ese caso (dos ángulos fijos en el plano y esfera).	El IP: "¿Cuántos triángulos diferentes se pueden construir?", la V-CPa1-S3|1:52:00-1:52:04|: "Infinitos, por los lados". V-CPa1-S3|1:52:25-1:52:28|: "Con dos lados [CPa1: Dados dos lados], ve dos ángulos", V-CPa3-S3|1:52:32-1:52:37|: "¿Por qué, por qué [menciona el nombre de CP2]?". CPa3 lee la T3, V-CPa1-S3|1:52:47-1:52:55|: "Aquí dos ángulos, el otro ángulo mide 30", V-CP2-S3|1:52:57-1:53:21|: "Obligatoriamente una medida, el otro ángulo mide obligatoriamente una medida [CPa3: Una medida obviamente], el otro ángulo mide obligatoriamente uno y solo un valor, porque acá se forma uno de 90, 60, 30; como los dos ángulos, el otro obligatoriamente va a tener esa medida", V-CPa1-S3|1:53:43-1:53:28|: "Y de los lados [menciona a CP2]", V-CP2-S3|1:53:58-1:54:04|: "Infinitos, va a ser un triángulo escaleno siempre, las medidas de sus lados van a ser diferentes siempre", V-CP2-S3|1:54:12-1:54:20|: "En el caso de que todos sean diferentes va a ser un triángulo escaleno, pero si dos son iguales siempre va a ser un triángulo isósceles", V-CPa1-S3|1:54:47-1:54:50|: "En el plano son infinitos, por qué, ¿por qué son infinitos en el plano?", V-CP2-S3|1:54:49-1:54:50|: "Por los lados", V-CPa1-S3|1:54:54-1:54:50|: "Porque los lados se cambian de medida". V-CP2-S3|2:01:50-2:02:08|: "Infinitos, porque como los segmentos pueden ir variando, entonces eso me va a dar siempre infinitos triángulos, independientemente de los dos ángulos fijos y de igual forma en el plano". El IP pregunta si se puede deducir la medida del tercer ángulo, V-CP2-S3|2:02:11-2:02:08|: "En el plano, sí; y en el caso de la esfera, no".  Figura 120. Construcción del equipo C para el caso AA. Fuente: Fotografía-sesión 3.	segundo y tercero; notan que al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia; condicionan el cambio de medida de un segmento al cambio de medida del ángulo opuesto. C-Seleccionan dos elemento de un triángulo (dos ángulo, de 60 y 90 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el tercer ángulo va a estar fijo, va a medir 30 grados; los tres lados del triángulo serán diferentes; formarán un triángulo escaleno); construyen un triángulos de 90, 60 y 30 grados; C- Seleccionan dos elementos de un triángulo (dos ángulos rectos); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (el vértice opuesto al segmento que está entre los dos ángulos fijos es el polo de la recta que contiene ese segmento); sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; construyen un triángulo birrectángulo; reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados; prolongan el lado que está entre los ángulos fijos [teoría de la polaridad]; establecen que, en el plano, dos ángulos fijan el tercer ángulo, pero en la esfera no. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo	Ángulo **condicionador** (cambian la medida del lado opuesto) [P y E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E]. **Dos ángulos fijos fijan el tercer ángulo** del triángulo plano [P]. **Dos ángulos fijos no fijan el tercer ángulo** del triángulo esférico [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Reconocer que en ese caso (dos lados y un ángulo fijo en el plano y esfera) se puede construir solo un triángulo. Establecer una estrategia de construcción geométrica.	EL IP: "Dado esos elementos que tienen de partida, ¿qué podemos decir de los otros elementos?", el V-BP1-S3|2:28:24-2:29:05|: "Bueno, los otros, dado que este mide 90, lo mismo, que estos tienen que ser complementarios [que los otros dos ángulos deben sumar 90 grados]. Este segmento [el tercero], ya se ve delimitado, tiene que tener una medida exacta para formar el triángulo, porque si ya lo hago más, o sea, esta sería la medida exacta para formar el triángulo, que si mide más, ya no; si mide menos, tampoco, entonces la longitud del tercero estaría condicionada".  Figura 105. Construcción del equipo B para el caso LLA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3. (T6) El IP: "Me está diciendo que solo se puede construir un triángulo", V-BP1-S3|2:29:12-2:29:18|: "Sí, porque si lo pongo en medio de estos dos también solo se puede formar uno", V-BPa2-S3|2:29:29-2:29:37|: "Es cierto, al principio decía que se podían formar más, pero me acordé después que estos dos estaban fijos y es cierto, por eso solo se puede formar uno". V-BP1-S3|2:51:18-2:52:17|: "Bueno, en el plano nos dimos cuenta que podíamos colocar ese ángulo entre los dos lados o podríamos colocarlo y en el exterior del otro lado, pero de igual forma probamos que el tercer lado se veía condicionado; o sea, la longitud del tercer lado estaría condicionada por lo que solo se podría formar un triángulo, eso en el plano. De igual forma, en la esfera, los dos segmentos que formamos eran geodésicas y también corroboramos colocar el ángulo entre los dos segmentos y en la parte superior del otro segmento [refiere al extremo de uno de ellos], y también la tercera geodésica era única, entonces era única la otra, entonces solo se podía formar un triángulo".	(lado, lado y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los ángulos pueden cambiar de medida, los otros dos ángulos son complementarios); prueban formar el triángulo colocando los elementos ALL, LAL, y LLA; establecen que el ángulo debe estar entre los dos lados fijos o después de los dos lados; establecen que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, lado y ángulo); prueban organizar sus elementos de las tres formas posibles: ALL, LAL, LLA; notan que esos elementos fijos condicionan o fijan los otros elementos; notan que se forma un ángulo de 90 grados, por lo que deducen que uno de los lados de ese ángulo puede pasar por el polo del otro lado (teoría de la polaridad).	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. **Relacion entre ángulos – complementarios** [P y E]. Ángulo como una **cualidad dinámica** por su forma en movimiento [P y E]. Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – perpendicularidad [P y E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E].
	Reconocer que en ese caso (tres ángulos fijos en el plano) se pueden construir infinitos triángulos.	La V-CPa3-S3|2:36:36-2:36:39|: "Entonces, ¿qué podemos decir de los ángulos?". V-CPa1-S3|2:36:41-2:36:31|: "Tres ángulos, tomamos los tres ángulos en el plano, no se puede decir nada, solo de los lados, [CPa3: Sí]". V-CP2-S3|2:36:53-2:36:56|: "De los lados podemos decir que va a ser un triángulo escaleno". V-CPa1-S3|2:37:40-2:37:42|: "Y cuántos vamos a tener en el plano, [CPa3: Infinitos], por los lados", el V-CP2-S3|2:36:53-2:36:56|: "Por los lados, por lo que hablábamos ayer, a diferencia de por los lados que	C- Seleccionan tres elementos de un triángulo (tres ángulos, de 90, 60 y 30 grados); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que el tercer ángulo sea de 30 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (los lados no fijos pueden cambiar de medida, los tres ángulo deben sumar 180 grados, los tres	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
	Establecer una estrategia de construcción geométrica.	siempre va a ser el mismo [refiere a si tuviera fijos los lados]".	lados tendrán diferente medida, se formarán triángulos escalenos).	Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P].
	Reconocer que en ese caso (tres ángulos fijos en la esfera) se puede construir solo un triángulo. Establecer una estrategia de construcción geométrica.	V-CPa3-S3|2:44:37-2:44:40|: "Nosotros tenemos condicionados los tres", V-CPa3-S3|2:45:15-2:45:19|: "Con esos tres ángulos, solo se forma uno [CP2: Ajá, uno]", V-CP2-S3|2:45:21-2:45:44|: "Sí, porque si usted se fija, esto cambia. Mueva este para acá, ahí, y ahí sí se formaría uno nada más y volvería a tener, que sería desde el polo a la circunferencia, a la circunferencia mayor", V-CP2-S3|2:45:56-2:46:00|: "Si usted se fija, tenemos un diámetro; este va a llegar hasta el polo prácticamente", el IP: "¿Por qué llega al polo?", V-CP2-S3|2:46:14-2:46:45|: "Supongamos que llega al polo, [IP: ¿por qué?], [CPa1: Porque es en ángulo recto], …, ajá. Entonces solo formaría uno".  Figura 126. Deducción del triángulo único dado tres ángulos fijos en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.	C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (tres ángulos rectos); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (construirán uno o varios triángulos equiángulos); establecen, erróneamente, que cuando tengan tres ángulos también van a construir infinitos triángulos; sobreponen los ángulos en la superficie de la esfera; observan que al cambiar la medida de los lados también cambia la medida de los ángulos; establecen que los ángulos fijos, fijan también los lados; reconocen que construyeron un triángulo equiángulo, con los tres ángulos de 90 grados; reconocen que los vértices son los polos del lado opuesto, por ser tres ángulos rectos, y que los lados son radios de circunferencias máximas [teoría de la polaridad].	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Construyen un **triángulo trirrectángulo** [E]. **Tres ángulos esféricos fijos construyen un único triángulo** [E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E].
	Reconocer que en ese caso (LAA fijos en el plano y esfera) se puede construir solo un triángulo. Establecer una estrategia de construcción geométrica.	AP3-S3|3:02:00-3:02:02|: "Un lado, ángulo, ángulo", APa1-S3|3:02:05-3:02:07|: "Un lado fijo y dos ángulos", AP3-S3|3:02:33-3:02:40|: "90, es un rectángulo, igual solo se puede formar uno [la APa2 y el AP3 hacen la construcción de la figura 92]", V-APa2-S3|3:02:41-3:02:43|: "Sí porque están condicionados [refiere al resto de los elementos]". APa1-S3|3:07:46-3:07:55|: "Entonces este está fijo, este también [AP3: Y ese también, pero igual solo se puede formar uno]". En la DG, al preguntar lo que pasó en el plano y en la esfera, todo el grupo dijo que solo un triángulo. V-BPa3-S3|3:11:04-3:11:06|: "Con esos lados, solo uno", el V-BP1-S3|3:11:06-3:11:08|: "Sí, solo es uno, solo uno se puede". El IP: "cuántos en el plano", V-BP1-S3|3:11:13-3:11:08|: "Uno. Intentamos hacer esto primero, entonces nos dimos cuenta de que solo se formaba uno, pero este lado que no sabemos	A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); notan que esos elementos fijan a los elementos restantes; reconocen que su triángulo es rectángulo (por la selección de sus ángulos, el tercer ángulo debe medir 90 grados). B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); seleccionan los elementos dependiendo de la	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionador** [P y E]. Los triángulos **solo pueden tener un ángulo recto** [P].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		cuánto es, entonces podríamos colocarlo acá, así, pero nos dábamos cuenta de eso, que podemos colocarlo acá, pero el tercer lado no va a formar el triángulo con este porque este es fijo, entonces solo puede estar moviendo el ángulo [sin cambiar la medida del ángulo, lo mueve por el lado no fijo], hasta que se encuentran [prueba colocar los elementos de diferentes formas: AAL, ALA, LAA]", el IP les dice además que este ángulo es fijo [el tercer ángulo], V-BP1-S3|3:11:51-3:11:55|: "Sí, por la suma de los tres ángulos tiene que ser fija". Figura 106. Construcción del equipo B para el caso LAA en el plano. Fuente: Fotografía-sesión 3. V-CPa1-S3|3:16:35-3:16:36|: "Dos ángulos y un lado", V-CPa1-S3|3:16:55-3:16:59|: "Estos van a ser los fijos, estos tres", V-CPa1-S3|3:17:03-3:17:13|: "Pero estos pueden variar… [APa3: Ok, no, porque no estaría en 90]", V-CP2-S3|3:17:22-3:17:27|: "Hágalos así, [CPa1: El que, este], sí, fíjese si sigue de 90". V-CPa1-S3|3:19:31-3:19:44|: "Hay que trazarlo con esta [CPa3: Maje no], sí, con este podemos [el IP sugiere usar la cuerda y hacer línea punteada]". Trazaron la línea usando la cuerda tensa, V-CP2-S3|3:20:40-3:21:09|: "Agarre la punta [CPa1: Ya la tengo], estírelo [toman dos cuerdas grandes y colocan en los lados no fijos (ver figura 130)], [CPa3: Ya tengo las dos puntas], ajá, ¿puede variar? No, se deforma, entonces, uno". V-CP2-S3|3:21:12-3:21:23|: "Pero aquí es de 90 otra vez [se pregunta por la medida del tercer ángulo], [CPa3: No sé, confírmelo], tendría que, matemática".  Figura 130. Construcción del equipo c para el caso LAA en la esfera. Fuente: Fotografía-sesión 3.	composición del triángulo (que la suma de los dos ángulos no sea igual o mayor a 180 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); colocan los elementos en diferentes posiciones para verificar si se forma el triángulo: ALA, AAL, LAA. C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); seleccionan los elementos dependiendo de la composición del triángulo (que la suma de los dos ángulos no sea igual o mayor a 180 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (dos lados pueden cambiar de medida y el tercer ángulo está fijo); reconocen que su triángulo es rectángulo; notan que esos elementos fijan a los elementos restantes. A-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo y ángulo); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias; colocan los ángulos en los extremos del segmento; mantienen el ángulo de 60 grados entre el segmento fijo y la regla esférica; marcan un punto para mantener la abertura del ángulo de 45 grados. B-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, ángulo de 150 grados y ángulo de 60 grados); exponen sus elementos de partida y sus consecuencias; prueban formar un triángulo en el que la suma de sus ángulos internos sea mayor a 180 grados; trazan una recta completa para tomar de ella un segmento no fijo con un ángulo de 60 grados respecto del segmento fijo; colocan el	**Dos ángulos fijos fijan el tercer ángulo** del triángulo plano [P]. **Dos ángulos fijos no fijan el tercer ángulo** del triángulo esférico [E]. Ángulo como una **cualidad dinámica** por su forma en movimiento [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E].

	Prácticas	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
			ángulo de 150 grados en diferentes posiciones; mueven el ángulo de 150 sobre la recta; prologan los lados de los ángulos e identifican sí coinciden o no con el otro lado; identifican que solo en el caso ALA se forma un triángulo. C-Seleccionan tres elementos de un triángulo (lado, dos ángulos de 90 grados); colocan los dos ángulos rectos en los extremos del segmento fijo; procuran cambiar la medida de los elementos no fijos; notan que esos elementos fijan a los demás.	Ángulo como una **cualidad dinámica** por su forma en movimiento [P y E]. Construyen un **triángulo obtusángulo-rectángulo** [E]. **Dos ángulos fijos no fijan el tercer ángulo** del triángulo esférico [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E]. El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E].
	Establecer que en la esfera se tiene un nuevo criterio de congruencia de triángulo, AAA.	la APa1 justifica el criterio AAA para triángulos esféricos a la no existencia del paralelismo en la esfera (ver figura 98). Por su parte, la APa2 justifica el caso AAA en el plano por la semejanza, que antes habían asociado al paralelismo, y en la esfera a la no existencia del paralelismo (ver figura 99).  Resumen de los casos ¿cuántos triángulos diferentes se pueden construir? Casos / Plano / Esfera Un elemento fijo: L: todos los ∆ entre 0°<∆<180° / Infinitos; A: Infinitos / Infinitos Dos elementos fijos: LL: Infinitos / Infinitos pero el 3lado debe ser geódesica; LA: Infinitos / Infinitos; AA: Infinitos / Infinitos Tres elementos fijos: LLL: 1 triángulo / 1 triángulo; LLA: 1 / 1; LAA: 1 / 1; AAA: Infinitos / 1 triángulo porque no hay paralelismo. Figura 98. Tabla resumen por APa1. Fuente: HT. V-BP1-S3|3:33:02-3:33:10|: “Se cumple, pero para ciertos casos [IP: ¿Para qué casos no se cumple?], para el caso del último AAA. A diferencia en cuanto al plano, hay infinitos triángulos y en la esfera uno nada más y, por lo que decía el compañero [menciona a CP2], que los ángulos, los tres ángulos se pueden mantener, pero los triángulos pueden hacerse más amplios [hace un triángulo con sus manos y lo amplía (ver figura 108)], como hacerle un zoom, pero ya no, o sea, teniendo solamente esos tres elementos, no implica que el otro triángulo va a ser igual”.	A-B-C-Seleccionan elementos fijos de un triángulo en el plano y en la esfera (uno, dos y tres); construyen triángulos en cada uno de esos casos; describen los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno; notan que para el caso AAA hay una diferencia entre el plano (se pueden construir infinitos triángulos) y en la esfera (un único triángulo); justifican que en el plano se pueden construir infinitos triángulos por la semejanza; justifican que en la esfera se puede construir un único triángulo en el caso AAA.	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. **Tres ángulos esféricos fijos construyen un único triángulo** [E].

Análisis transversal para la caracterización de PSC

Organización de acciones y actividades

Nota: en la organización de las acciones y actividades, los colores indican que algunas actividades pasan a ser acciones para otras actividades; por ejemplo, la actividad de *interpretar la rectitud de la recta* que está en color verde pasa a ser una acción para la actividad de *reconocer propiedades de la recta.*

Acciones	Actividades
Relacionan a la recta con el ángulo recto (por su nombre).	1- Interpretar la rectitud de la recta plana y esférica.
Reconocen que en todos los puntos de la recta el ángulo de un lado al otro es de 180 grados.	
Componen una recta por puntos sucesivos.	
Organizan sus puntos de forma colineal.	
Relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones (dos sentidos opuestos), una opuesta a la otra.	
Reconocen que una cuerda tensa entre dos puntos, en cualquier superficie, representa un segmento.	
Construyen rectas en el plano y en la esfera.	
Prueban la rectitud de la recta esférica tensando la cuerda sobre ella.	
Procuran, en la esfera, tensar la cuerda en circunferencias menores.	
Componen una recta por puntos sucesivos y segmentos.	2- Reconocer propiedades de la recta (plana y esférica) [están compuestas por infinitos puntos, la densidad de la recta plana y esférica, la infinitud de la recta plana y lo ilimitado de la recta esférica, las rectas pueden prolongarse o extenderse, las rectas tienen una dimensión, dividen al plano en dos semiplanos y dividen a la esfera en dos semiesferas, la esférica es una circunferencia por lo que también puede construirse por la definición de circunferencia]
Organizan sus puntos de forma colineal.	
Relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones (dos sentidos opuestos), una opuesta a la otra.	
Construyen rectas en el plano y en la esfera.	
Trasladan la infinitud de la recta plana a la esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran.	
Interpretan la rectitud de la recta plana y esférica.	
Dimensionan la recta y las superficies.	
Transfieren propiedades de las superficies a las representaciones de rectas en ellas.	
Atribuyen propiedades a través de símbolos (las flechas en sus representaciones de recta plana).	
Verifican la construcción de la recta AB, desde su definición de circunferencia midiendo su radios.	
Reconocen las 90 partes de círculo o el cuarto de circunferencia máxima como el radio de las circunferencias máxima.	
Reconocen propiedades de las rectas.	3- Reconocer propiedades del segmento (plano y esférica).
Transfieren la rectitud de la recta a un segmento.	
Prolongan o extienden el segmento.	
Dimensionan segmentos y sus superficies.	
Identifican, en la esfera, dos segmentos de recta entre dos puntos no opuesto e infinitos segmentos entre dos puntos opuestos.	
Diferencian las representaciones de segmentos planos y esféricos.	
Interpretan la rectitud de las rectas.	4- Reconocer dos representaciones de recta, plana y esférica.
Relacionan rectitud con colinealidad y colinealidad con dos direcciones (dos sentidos opuestos), una opuesta a la otra.	
Construyen rectas en el plano y en la esfera.	
Trasladan la infinitud de la recta plana a la esfera, dando la cantidad de vueltas que quieran.	

Acciones	Actividades
Procuran tensar la cuerda en circunferencias menores.	
Diferencian las superficies y las representaciones de recta.	
Transfieren propiedades de las superficies a sus representaciones de rectas.	
Reconocen propiedades de las rectas.	
Relacionan circunferencia máxima con distancia más corta y distancia más corta con recta esférica.	
Construyen rectas perpendiculares a una recta dada.	5- Relacionar rectas esféricas perpendiculares.
Reconocen que una intersección entre dos rectas condiciona a la segunda intersección.	
Verifican la perpendicularidad entre rectas utilizando instrumentos de medición planos en la esfera.	
Asocian las rectas perpendiculares a la recta dada con los meridianos del globo terráqueo y el ecuador.	
Construyen rectas oblicuas y paralelas.	6- Clasificar las relaciones de dos rectas planas (en un mismo plano: paralelas, oblicuas y perpendiculares; en planos diferentes: alabeadas).
Reconocen propiedades de la recta plana (pueden prolongarse, las rectas paralelas son equidistantes).	
Relacionan rectas a través de la intersección.	
Identifican rectas perpendiculares.	
Reconocen rectas en distintos planos.	
Diferencian pares de rectas, las que se intersecan y las que no.	
Construyen una de las relaciones de rectas planas en la esfera.	7- Asentir la inexistencia del paralelismo en la esfera.
Comparan su construcción con nociones geográficas (paralelas con paralelos).	
Procuran verificar el paralelismo en la esfera.	
Identifican circunferencias paralelas a la circunferencia máxima.	
Procuran mostrar circunferencias máximas paralelas a la circunferencia máxima inicial, tensando la cuerda y colocando la regla esférica no totalmente superpuesta en la superficie.	
Notan que la cuerda en circunferencias paralelas a la circunferencia máxima se desliza hacia el polo.	
Trasladan las circunferencias paralelas acercándolas a la circunferencia máxima, intentando tensar la cuerda.	
Observan y reconocen que a medida que la circunferencia se acerca a la circunferencia máxima es más fácil tensar la cuerda (la tensión de la cuerda cambia).	
Reconocen que la cuerda solo se puede tensar en la circunferencia máxima.	
Caracterizan a los paralelos diferentes al ecuador como circunferencias esféricas.	
Reconocen que en la esfera todas las circunferencias máximas se van a intersecar en dos puntos.	
Construyen rectas perpendiculares a una recta dada.	8-Generalizar la relación de que todas las rectas esféricas perpendiculares a una recta dada se intersecan en los polos de la recta dada [teoría de la polaridad]
Interpretan la construcción.	
Reconocen que una intersección entre dos rectas condiciona a la segunda intersección.	
Establecen estrategias para construir infinitas rectas perpendiculares a una recta dada (girando la esfera y fijando la regla o viceversa, relacionando la construcción con la geografía y construyendo varios casos).	
Trasladan el ángulo recto por la recta dada.	
Trasladan la recta perpendicular.	
verifican la perpendicularidad entre rectas.	
Reconocen que todas las rectas se intersecan en los polos, que los polos son los centros de la circunferencia dada y que la distancia entre los polos y la circunferencia es ¼ de circunferencia máxima.	
Construyen rectas oblicuas y paralelas.	9-Reconocer propiedades en la relación de dos rectas planas (pueden o no intersecarse; si se intersecan solo se intersecan en un punto; la existencia del paralelismo, oblicuidad y perpendicularidad).
Reconocen propiedades de la recta plana (pueden prolongarse, las rectas paralelas son equidistantes).	
Relacionan rectas a través de la intersección.	
Reconocen que dos rectas que se intersecan lo hacen solo en un punto.	
Identifican rectas perpendiculares.	
Reconocen propiedades de la recta esférica.	10-Reconocer propiedades en la relación de dos rectas esféricas (siempre se intersecan en dos puntos; se relacionan divergiendo y
Asienten la inexistencia del paralelismo en la esfera.	
Marcan dos meridianos en el globo terráqueo.	
Establecen que el ecuador y todos los meridianos y antimeridianos son rectas esféricas.	
Reconocen que las circunferencias máximas son rectas esféricas.	
Relacionan rectas esféricas perpendiculares.	

Acciones	Actividades
Identifican los paralelos distintos al ecuador	convergiendo; la existencia de la perpendicularidad y la oblicuidad; y la inexistencia del paralelismo).
Analizan el cambio de longitud en los arcos de los paralelos entre dos meridianos marcados.	
Observan y reconocen que a medida se alejan del polo norte la longitud de los arcos aumenta.	
Observan y reconocen que a medida se acercan al polo sur la longitud de los arcos disminuyen.	
Identifican que en el ecuador se da el cambio de aumentar a disminuir en las longitudes de los arcos.	
Exponen propiedades de los elementos involucrados (los polos son los puntos de intersección, en el ecuador se da el cambio de diverger a converger).	
Descomponen a la circunferencia máxima en cuartos y en medios, según el comportamiento de los arcos de círculo o arcos de paralelos.	
Establecen que la distancia del polo al cambio de comportamiento es de ¼ de circunferencia máxima y la distancia entre los dos polos es de ½ de circunferencia máxima.	
Construyen un ángulo plano.	11-Establecer propiedades del ángulo plano.
Agregan símbolos a su representación (dirección del ángulo y flechas en sus lados).	
Identifican y nombran sus elementos : lado inicial, lado final y vértice.	
Señalan la apertura o abertura del ángulo (como la forma del ángulo).	
Identifican cuatro ángulos en la intersección de dos rectas, tres en la intersección de una recta y una semirrecta y dos en la intersección de dos semirrectas.	
Establecen que del ángulo se mide la abertura.	
Describen un instrumento y unidades de medida de ángulos, un círculo dividido en las partes que se quiera.	
Establecen propiedades del ángulo plano.	12-Establecer propiedades del ángulo esférico.
Reconocen que los ángulos, tanto en el plano como en la esfera, en cuanto elementos y formas son iguales.	
Identifican en la esfera cuatro ángulos en cada una de las intersecciones.	
Establecen que los ángulos que se forman en cada intersección son diferentes porque los vértices son diferentes.	
Justifican la diferencia en la cantidad de ángulos por la cantidad de intersecciones, la cantidad de intersecciones por la diferencia en las superficies.	
Identifican ángulos internos en un polígono de dos lados y los reconocen congruentes.	
Reconocen que los cuatro ángulos de una intersección son congruentes correspondientemente con los cuatro ángulos de la otra intersección.	
Establecen propiedades de un polígono (tres o más lados rectos, encierra una región de la superficie).	13-Reconocer propiedades del biángulo (polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices; los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima; sus ángulos internos son congruentes).
Exponen que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano.	
Identifican un polígono de dos lados en la esfera.	
Caracterizan el polígono de dos lados y dos ángulos (el coso, el pedazo, gajo de mandarina, sector esférico, arco esférico).	
Exponen prefijos para dos (duple, dúo, bi, du).	
Nombran el polígono de dos lados y dos ángulos (biángulo, diángulo, diágono, du-cágono, bilátero, lúnula).	
Notan y establecen que los lados del biángulo son constantes, miden una semicircunferencia máxima [relación divergencia-convergencia].	
Notan y establecen que sus ángulos internos son congruentes.	
Exponen los criterios de clasificación de los triángulos.	14-Clasificar los biángulos (según su área: región mayor y región menor; según se relación con otro biángulos: biángulos opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios; según la medida de sus ángulos internos: agudos, rectos, obtusos y cóncavos).
Establecen que el biángulo no se puede clasificar según la medida de los lados, porque siempre miden lo mismo.	
Consideran dos biángulos como ejemplos.	
Identifican biángulos opuestos por el vértice.	
Trasladan las relaciones de ángulos adyacentes y la clasificación del triángulo según la medida de sus ángulos del plano a la esfera.	
Relacionan ángulos adyacentes e identifican ángulos complementarios y suplementarios.	
Relacionan biángulos adyacentes e identifican biángulos complementarios y suplementarios.	
Establecen la medida de los ángulos internos como criterio de clasificación.	
Construyen algunos tipos de biángulos según la medida de sus ángulos internos (agudos, rectos y obtusos).	
Problematizan la existencia del biángulo nulo y llano.	
Seleccionan uno, dos o tres elementos fijos de un triángulo.	

Acciones	Actividades
Exponen su o sus elementos de partida y sus consecuencias (la medida de los otros elementos, el cambio en la medida de los otros elementos, su tipo en dependencia de su medida, sus limitaciones para mantener la forma triangular; los lados del triángulo esférico son geodésicas).	15-Establecer una estrategia de construcción geométrica para cada caso tanto en el plano como en la esfera (L, A, LL, LA, AA, LLL, LLA, LAA, AAA).
Construyen los elementos fijos.	
Nombran los elementos fijos (primero, segundo y tercer segmento; ángulo A, B y C).	
Prolongan y acortan la longitud de los segmentos no fijos.	
Abren y cierran la abertura de los ángulos no fijos.	
Notan que al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia.	
Condicionan la abertura de los ángulos (manteniendo la forma triangular).	
Condicionan la prolongación de los lados (manteniendo a forma triángular – desigualdad triangular).	
Reconocen que la abertura de los ángulos puede medirse en grados enteros y decimales.	
Agregar elementos (perpendiculares, puntos para mantener la abertura de un ángulo).	
Exponen que todas las perpendiculares se intersecan en el polo del otro segmento [teoría de la polaridad]	
Construyen diferentes casos.	
Cambian los elementos fijos y no fijos de posición.	
Establecen casos bases y casos extremos.	
Establecen propiedades, erróneas y correctas matemáticamente (*incorrectas*: dado un lado, que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo; dado un lado, solo se forma un único triángulo rectángulo; los triángulos son finitos porque las rectas son finitas; el triángulo esférico está condicionado por la medida de 180 grados de los ángulos internos; dado un ángulo recto fijo en la esfera, los dos ángulos no fijos serán congruentes correspondientemente a cuando la tercera recta (opuesta al ángulo fijo) cambia de posición; con tres ángulo fijos en la esfera, al igual que el plano, van a construir infinitos triángulos; el ángulo entre dos lados esféricos puede medir más de 180 grados. *Correctas*: el triángulo equilátero es un caso particular del triángulo isósceles; en la esfera la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados y no constante; dado un ángulo recto y un segmento (cateto), la hipotenusa debe ser siempre mayor que el segmento fijo; dado que los tres ángulo son diferentes, los tres lados del triángulo también serán diferentes; dados dos ángulos rectos en la esfera, el vértice opuesto al segmento que está entre los dos ángulos rectos es el polo de la recta que contiene ese segmento [teoría de la polaridad]; en el plano, dos ángulo fijan el tercer ángulo; hay una diferencia entre el plano y la esfera para el caso AAA, en el plano se forman infinitos y en la esfera solo uno).	
Notan que en algunos casos los elementos fijos fijan los otros elementos.	
Muestran la construcción de uno o infinitos triángulos.	
Establecen una diferencia entre el plano y la esfera para el caso AAA, en el plano se forman infinitos y en la esfera solo uno.	
Seleccionan uno, dos o tres elementos fijos de un triángulo.	16-Establecer que el tercer lado de un triángulo plano y esférico no puede ser mayor que la suma de los otros dos (desigualdad triangular).
Exponen sus elementos de partida y sus consecuencias.	
Prolongan y acortan la longitud de los segmentos no fijos.	
Abren y cierran la abertura de los ángulos no fijos.	
Condicionan la abertura de los ángulos (manteniendo la forma triangular).	
Deforman el triángulo haciendo el ángulo entre dos lados fijos igual a 180 grados.	
Condicionan la prolongación de los lados (manteniendo a forma triángular).	
Suman dos lados del triángulo plano.	
Comparan la suma de dos lados del triángulo plano con la medida del tercer lado.	
Pasan los segmentos esféricos al plano, tensando las cuerdas en el plano.	
Suman dos lados del triángulo esférico.	
Comparan la suma de dos lados del triángulo esférico con la medida del tercer lado.	
Notan que en la esfera también se cumple la desigualdad triangular.	
Seleccionan uno, dos o tres elementos fijos de un triángulo.	17-Admitir que en la esfera existen regiones formadas por tres segmentos de recta que no son triángulos.
Exponen sus elementos de partida y sus consecuencias.	
Cuestionan el significado de geodésica.	
Establecen, erróneamente, que el ángulo entre dos lados fijos puede ser mayor que 180 grados.	
Identifican las geodésicas que se forman entre los tres vértices.	
Identifican segmentos de recta que no son geodésicas.	
Exponen que los ángulos internos de un triángulo en el plano suman 180 grados.	18-Reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor
Construyen los elementos fijos.	
Prolongan y acortan la longitud de los segmentos no fijos.	
Abren y cierran la abertura de los ángulos no fijos.	

Acciones	Actividades
Agregar elementos (perpendiculares).	que 180 grados y no constante.
Exponen que todas las perpendiculares se intersecan en el polo del otro segmento [teoría de la polaridad].	
Construyen un triángulo birrectángulo.	
Construyen un triángulo obtusángulo-rectángulo.	
Construyen un triángulo trirectángulo.	
Seleccionan uno, dos o tres elementos fijos de un triángulo.	19-Reconocer que para los casos L, A, LL, LA, AA se pueden construir infinitos triángulos tanto en el plano como en la esfera.
Exponen su o sus elementos de partida y sus consecuencias (la medida de los otros elementos, el cambio en la medida de los otros elementos, su tipo en dependencia de su medida, sus limitaciones para mantener la forma triangular; los lados del triángulo esférico son geodésicas).	
Establecen una estrategia de construcción geométrica.	
Construyen los elementos fijos.	
Nombran los elementos fijos (primero, segundo y tercer segmento; ángulo A, B y C).	
Prolongan y acortan la longitud de los segmentos no fijos.	
Abren y cierran la abertura de los ángulos no fijos.	
Notan que al cambiar la medida de un ángulo también el segmento opuesto cambia.	
Condicionan la abertura de los ángulos (manteniendo la forma triangular).	
Condicionan la prolongación de los lados (manteniendo a forma triángular – desigualdad triangular).	
Reconocen que la abertura de los ángulos puede medirse en grados enteros y decimales.	
Agregar elementos (perpendiculares, puntos para mantener la abertura de un ángulo).	
Exponen que todas las perpendiculares se intersecan en el polo del otro segmento [teoría de la polaridad].	
Construyen diferentes casos.	
Cambian los elementos fijos y no fijos de posición.	
Establecen casos bases y casos extremos.	
Establecen propiedades, erróneas y correctas matemáticamente (*incorrectas*: dado un lado, que el ángulo opuesto al segmento fijo es siempre agudo; dado un lado, solo se forma un único triángulo rectángulo; los triángulos son finitos porque las rectas son finitas; el triángulo esférico está condicionado por la medida de 180 grados de los ángulos internos; dado un ángulo recto fijo en la esfera, los dos ángulos no fijos serán congruentes correspondientemente a cuando la tercera recta (opuesta al ángulo fijo) cambia de posición; con tres ángulo fijos en la esfera, al igual que el plano, van a construir infinitos triángulos; el ángulo entre dos lados esféricos puede medir más de 180 grados. *Correctas*: el triángulo equilátero es un caso particular del triángulo isósceles; en la esfera la suma de los ángulos internos de un triángulo es mayor que 180 grados y no constante; dado un ángulo recto y un segmento (cateto), la hipotenusa debe ser siempre mayor que el segmento fijo; dado que los tres ángulo son diferentes, los tres lados del triángulo también serán diferentes; dados dos ángulos rectos en la esfera, el vértice opuesto al segmento que está entre los dos ángulos rectos es el polo de la recta que contiene ese segmento [teoría de la polaridad]; en el plano, dos ángulo fijan el tercer ángulo; hay una diferencia entre el plano y la esfera para el caso AAA, en el plano se forman infinitos y en la esfera solo uno).	
Exponen que no se pueden contar los diferentes triángulos que se pueden formar.	
Muestran la construcción de infinitos triángulos.	
Seleccionan tres elementos fijos de un triángulo (LLL, LLA, LAA).	20-Reconocer que para los casos LLL, LLA, LAA se puede construir solo un triángulo tanto en el plano como en la esfera.
Exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (la medida de los otros elementos, su tipo en dependencia de su medida, sus limitaciones para mantener la forma triangular; los lados del triángulo esférico son geodésicas).	
Establecen una estrategia de construcción geométrica.	
Construyen los elementos fijos.	
Nombran los elementos fijos (primero, segundo y tercer segmento; ángulo A, B y C).	
Procuran cambiar la abertura de los ángulos no fijos.	
Cambian los elementos fijos y no fijos de posición.	
Exponen que todas las perpendiculares se intersecan en el polo del otro segmento [teoría de la polaridad].	
Notan que, al cambiar la abertura de ángulos no fijos, los lados fijos no se mantienen.	
Establecen que los elementos fijos fijan los otros tres elementos.	
Seleccionan tres ángulo de un triángulo plano y esférico.	21-Reconocer que para el caso AAA, hay una diferencia entre el plano y la esfera, en el plano se pueden construir infinitos
Exponen sus elementos de partida y sus consecuencias (en el plano los tres ángulos deben sumar 180 grados, dado que los tres ángulos son diferentes, los tres lados serán diferentes).	
Establecen una estrategia de construcción geométrica.	
Construyen los elementos fijos.	
Nombran los elementos fijos (primero, segundo y tercer segmento; ángulo A, B y C).	

Acciones	Actividades
Prolongan y acortan la longitud de los segmentos no fijos en el plano.	triángulos y en la esfera solo uno.
Reconocen que los triángulos planos construidos son triángulos semejantes.	
Establecen que los triángulos semejantes son consecuencias del paralelismo en el plano.	
Reconocen que con tres ángulos fijos en el plano se pueden construir infinitos triángulos.	
Establecen, erróneamente, que cuando tengan tres ángulos fijos en la esfera también van a construir infinitos triángulos.	
Procuran cambiar la longitud de los lados.	
Notan que, al cambiar al cambiar la medida de los lados, los ángulos fijos no se mantienen.	
Establecen que los ángulos fijos en la esfera también fijan sus tres lados.	
Exponen que todas las perpendiculares se intersecan en el polo del otro segmento [teoría de la polaridad].	
Notan que para el caso AAA hay una diferencia, entre el plano (se pueden construir infinitos triángulos) y en la esfera (un único triángulo).	
Justifican la diferencia por la existencia o no del paralelismo.	
Reconocen que con tres ángulos fijos en la esfera se puede construir un único triángulo.	
Seleccionan elementos fijos de un triángulo en el plano y en la esfera (uno, dos y tres).	22-Establecer que en la esfera se tiene un nuevo criterio de congruencia de triángulo, AAA.
Construyen triángulos en cada uno de esos casos.	
Discriminan los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno.	
Notan que para el caso AAA hay una diferencia, entre el plano (se pueden construir infinitos triángulos) y en la esfera (un único triángulo).	
Justifican que en el plano se pueden construir infinitos triángulos por la semejanza.	
Justifican que en la esfera se puede construir un único triángulo en el caso AAA, porque no hay paralelismo.	
Seleccionan elementos fijos de un triángulo en el plano y en la esfera (uno, dos y tres).	23-Reconocer que, si dos triángulos comparten elementos, como en los casos en los que solo se podía construir un único triángulo, ambos triángulos son congruentes.
Construyen triángulos en cada uno de esos casos.	
Discriminan los casos en los que se construyen infinitos triángulos y en los que solo se puede construir uno.	
Establecen que en algunos casos los elementos fijos condicionan a los otros elementos.	
Asocian la construcción única de los triángulos con la congruencia.	
Ejemplifican como criterios de congruencia los casos trabajados en los que se construye solo un triángulo (LLL, ALA, LAL y AAA [caso extra en la esfera]).	

Dado el fundamento epistemológico de las tareas de problematización tiene sentido el proceso de construcción que siguió la población participante, sin embargo, este proceso se robustece: exponen sus elementos geométricos de partida y sus propiedades, transforman los elementos de partida en dependencia de sus propiedades, establecen una estrategia de construcción geométrica, ejecutan la estrategia (agregan elementos auxiliares, establecen conjeturas y las verifican y reconocen propiedades) y argumentan su proceso de construcción.

Dado el trabajo en el plano, se reconoce que las actividades matemáticas caracterizadas sobre la geometría plana están organizadas por cierta forma de actuación matemática o práctica socialmente compartida, propias de la naturaleza de esta geometría, esta psc la denominamos: ***establecer relaciones entre nociones geométricas planas (relaciones entre rectas, entre ángulos y entre polígonos).***

Relaciones entre rectas (perpendicularidad, paralelismo, oblicuidad): estas relaciones favorecen la comprensión del trabajo geométrico intrínseco en el plano, donde la geodésica está asociada a la rectitud de la recta (A1), *la infinitud de la recta como consecuencia de la infinitud del plano* (A2 y A4), de ahí que *una recta divide al plano en dos semiplano* (A2). Las rectas se relacionan por su intersección o no intersección; las que se

intersecan lo hacen en un solo punto (A9), estas pueden ser oblicuas o perpendiculares; las que no se intersecan son las rectas paralelas (A6). El segmento de recta hereda las propiedades de la recta (A3), por lo que con su intersección se caracteriza un ángulo como una relación y con una cantidad por la perpendicularidad u oblicuidad (A11).

Relaciones entre ángulo (complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice): las relaciones entre rectas, semirrectas o segmentos de perpendicularidad y oblicuidad construyen ángulos (A2, A3, A4, A6, A9, A11); y las relaciones entre ángulos (complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice) (A13), establecen *al ángulo recto y el ángulo llano como referentes de medida y a la congruencia de ángulos como argumento en las relaciones de polígonos*.

Relaciones entre polígonos (congruencia y semejanza): De las relaciones entre rectas, semirrectas y segmentos se construyen ángulo y de las relaciones entre ángulos y segmentos se construyen polígonos. Cuando ciertos elementos permiten la construcción de triángulos únicos (A15, A16, A19, A20, A21), significa que si dos triángulos comparten esos elementos entonces esos dos triángulos son congruentes y esos elementos se establecen como *criterios de congruencia para relacionar triángulos* (A23).

Con el paso al trabajo en la esfera, por la hipótesis epistemológica que fundamenta esta geometría, se reconocen esas relaciones (teoría de la polaridad y relación divergencia convergencia) como parte de un conjunto más grande de relaciones; de ahí que, se denomina psc, ***establecer relaciones entre nociones geométricas esféricas (relaciones entre punto-recta [teoría de la polaridad], entre rectas [divergencia-convergencia], entre ángulos y entre polígonos)***.

Teoría de la polaridad: relación entre una recta o segmento de recta y un punto (su polo), se usa como la relación entre el polo y una distancia (radio o cuadrante) que permiten la construcción de las líneas rectas en la esfera o circunferencias máximas. Esta relación favorece el reconocimiento del ángulo recto o dos ángulos rectos como referentes y unidades de medida de ángulos (A12), dada la propiedad de que, *si una recta pasa por el polo de una segunda recta, entonces ambas rectas son perpendiculares (forman ángulos rectos)* (A5, A8, A10), Además, el reconocimiento del radio o cuadrante como un referente o unidad de medida de un segmento. Esta relación y su propiedad se presenta como una estrategia para construir uno o infinitos triángulos dado algunos elementos fijos (A15, A19, A20); y en el establecimiento de nuevas propiedades geométricas, por ejemplo, la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es mayor que 180 grados y no constante (A18), en la esfera el caso AAA es un criterio de congruencia de triángulos (A21, A22).

Relación divergencia – convergencia: esta es una relación entre dos rectas a través de sus intersecciones (perpendicularidad u oblicuidad). Esta relación favorece el reconocimiento del cuadrante (donde cambia la relación de divergencia a convergencia) y el semicírculo (donde vuelven a converger dos rectas) como referentes y unidades de medida de segmentos (A12, A13, A14). Además, cuando un segmento se levanta sobre otro (donde una recta inicia en un punto intermedio de otra) forma dos ángulos que suman dos ángulos rectos, los cuales son

establecidos para referir a medidas de ángulos. Esta relación muestra la inexistencia del paralelismo en la esfera (A7), dado que dos rectas siempre se intersecan y lo hacen en dos puntos (A10). Esta relación y su propiedad se presenta como una estrategia para construir uno o infinitos triángulos dado algunos elementos fijos (A15, A19, A20); y en el establecimiento de nuevas propiedades geométricas, por ejemplo, el tercer lado de un triángulo esférico no puede ser mayor que la suma de los otros dos (desigualdad triangular en la esfera) (A16) y la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico es mayor que 180 grados y no constante (A18).

Relaciones entre ángulo (complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice, regionales [internos en el biángulo]): las relaciones entre rectas, semirrectas o segmentos de perpendicularidad y oblicuidad construyen ángulos (A2, A3, A4, A5, A7, A10, A12); y las relaciones entre ángulos (complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice y regionales [internos de un biángulo]) (A13) establecen *al ángulo recto y el ángulo llano como referentes de medida y a la congruencia de ángulos como argumento en las relaciones de polígonos* (A13, A14).

Relaciones entre polígonos (congruencia): De las relaciones entre rectas, semirrectas y segmentos se construyen ángulo y de las relaciones entre ángulos y segmentos se construyen polígonos. Cuando ciertos elementos permiten la construcción de triángulos únicos (A15, A16, A19, A20), significa que si dos triángulos comparten esos elementos entonces esos dos triángulos son congruentes y esos elementos se establecen como *criterios de congruencia para relacionar triángulos* (A23). Estas relaciones permitieron establecen un nuevo criterio de congruencia de triángulo en la esfera, AAA (A21, A22).

Análisis transversal para la caracterización de usos en las PSC

		¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		Recta y segmento de recta plano y esférico		
En las prácticas socialmente compartidas		P-Relaciones entre rectas (perpendicularidad, paralelismo, oblicuidad).	Interpretan la rectitud de la recta plana. Reconocen propiedades de la recta (plana) [están compuestas por infinitos puntos, la densidad de la recta plana y esférica, la infinitud de la recta plana, las rectas pueden prolongarse o extenderse, las rectas tienen una dimensión, dividen al plano en dos semiplanos]. Reconocen propiedades del segmento (plano). Reconocen la representación de la recta plana. Clasifican las relaciones de dos rectas planas (en un mismo plano: paralelas, oblicuas y perpendiculares; en planos diferentes: alabeadas). Reconocen propiedades en la relación de dos rectas planas (pueden o no intersecarse; si se intersecan solo se intersecan en un punto; la existencia del paralelismo, oblicuidad y perpendicularidad). Establecen propiedades del ángulo plano.	Recta **compuesta por infinitos puntos sucesivos colineales y segmentos** [P]. Recta **compuesta por puntos sucesivos colineales** [E]. **Recta desde dos direcciones (sentidos)**, una opuesta a la otra [P, E]. Segmento como la **tensión de una cuerda** entre esos puntos [P, E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos** [P, E]. **Recta extensible** [P,E]. **Segmento extensible** [P, E]. **Recta infinita** [P]. **Recta finita-ilimitada** [E]. Recta como **una circunferencia máxima** [E]. Recta como **elemento divisor** de la superficie [P, E]. Recta como **eje de simetría** [P, E]. Segmento **como argumento** en la dedución de propiedades de la recta [E]. **Dos puntos definen un único segmento** [P]. **Dos puntos no opuestos definen dos segmentos** [E]. **Dos puntos opuestos definen infinitos segmentos** [E]. **Relación entre rectas – oblicuidad/paralelismo/perpendicularidad/aleabilidad** [P]. Todas **las rectas que se intersecan lo hacen en un punto** [P]. **Las rectas que no se intersecan son equidistantes** [P]. **Dos rectas formas cuatro ángulos en el plano** [P]. **Una recta y una semirrecta forman tres ángulos** en el plano [P]. **Dos semirrectas forman dos ángulos en el plano** [P].
		P-Relaciones entre polígonos (congruencia y semejanza) E- Relaciones entre polígonos (congruencia)	Establecen una estrategia de construcción geométrica para cada caso en el plano (L, A, LL, LA, AA, LLL, LLA, LAA, AAA). Establecen que el tercer lado de un triángulo plano y esférico no puede ser mayor que la suma de los otros dos (desigualdad triangular). Reconocen que para los casos L, A, LL, LA, AA se pueden construir infinitos	Segmento **extensible** [P y E]. Segmento **reducible** [P y E]. Segmento como una **cantidad dinámica** [P y E]. Segmento como una **cantidad estática** [P y E]. Segmento como una **cualidad dinámica** [P y E]. Segmento como una **cualidad estática** [P y E]. Segmento **condicionador** [P y E].

		¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
			triángulos tanto en el plano como en la esfera. Reconocen que para los casos LLL, LLA, LAA se puede construir solo un triángulo tanto en el plano como en la esfera. Reconocen que, si dos triángulos comparten elementos, como en los casos en los que solo se podía construir un único triángulo, ambos triángulos son congruentes.	Segmento **condicionado** (fijo) [P y E]. El **segmento condicionado** (no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [P y E]. El **segmento condicionado** (por ser la hipotenusa debe ser más grande que los otros dos] [P]. Segmento **condicionado** (por la variación del ángulo opuesto) [P y E]. Segmento como la **distancia más corta entre dos puntos – geodésica** [P y E]. Segmento **como una cuerda tensa** [P y E]. **Relación entre segmentos – desigualdad triangular** [P y E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. El segmento **tiene extremos** [P y E]. Segmento **compuesto por segmentos** [P y E]. Segmento como **elemento compositor** de un triángulo [P y E]. El segmento **es un elemento compositor** (compone ángulos) [P, E]. **Relación entre segmentos - perpendicularidad** [P y E]. **Recta finita-ilimitada** [E]. **Tres rectas esféricas forman dos triángulos** [E]. **Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como catetos e hipotesusas de triángulos rectángulos [E]. **Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima** como radio de círcunferencia máxima [E].
		E- Teoría de la polaridad (relación recta – polo o distancias - polo).	Relacionar rectas esféricas perpendiculares. Reconocen propiedades en la relación de dos rectas esféricas (siempre se intersecan en dos puntos; se relacionan divergiendo y convergiendo; la existencia de la perpendicularidad y la oblicuidad; y la inexistencia del paralelismo). Generalizan la relación de que todas las rectas esféricas perpendiculares a una recta dada se intersecan en los polos de la recta dada [teoría de la polaridad]. Establecen una estrategia de construcción geométrica para cada caso tanto en el plano como en la esfera (L, A, LL, LA, AA, LLL, LLA, LAA, AAA). Reconocen que para los casos L, A, LL, LA, AA se pueden construir infinitos	**Relación entre rectas**-perpendicularidad [E]. **Dos rectas siempre se intersecan en dos puntos** [E]. **Las interseccionesentre dos rectas son congruentes** (los cuatro ángulos de una intersección son congruentes respectivamen con los cuatro ángulo de la otra intersección) [E]. Recta como una **circunferencia máxima** [E]. Recta como una **relación entre dos puntos y una distancia** [E]. Recta como una **circunferencia máxima** [E]. Recta como una **relación entre dos puntos y una distancia** [E]. **Relación entre rectas**-perpendicularidad [E]. **Recta como una relación dinámica** [E].

		¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
			triángulos tanto en el plano como en la esfera. Reconocen que para los casos LLL, LLA, LAA se puede construir solo un triángulo tanto en el plano como en la esfera.	**Recta como argumento** en el establecimiento de propiedades [E]. **Recta como eje de giro** [P]. **Recta como casos** en la generalización de propiedades [E]. **Rectas como elementos que componen** un ángulo [E]. Recta **como eje de simetría** [E]. **Recta como divisor de la superficie** [E]. **Relaciones entre rectas – perpendicuaridad/ oblicuidad** [E] Recta como **parte de un sistema de referencia** (coordenadas geográficas) [E]. Recta como **referencia de paralelismo de circunferencias esféricas** [E]. Recta desde la **tensión de una cuerda** [E].
		E- Relación divergencia – convergencia entre segmentos.	Asentir la inexistencia del paralelismo en la esfera. Reconocen propiedades en la relación de dos rectas esféricas (siempre se intersecan en dos puntos; se relacionan divergiendo y convergiendo; la existencia de la perpendicularidad y la oblicuidad; y la inexistencia del paralelismo). Reconocen propiedades del biángulo (polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices; los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima; sus ángulos internos son congruentes). Clasifican los biángulos (según su área: región mayor y región menor; según se relación con otro biángulos: biángulos opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios; según la medida de sus ángulos internos: agudos, rectos, obtusos y cóncavos). Establecen una estrategia de construcción geométrica para cada caso tanto en el plano como en la esfera (L, A, LL, LA, AA, LLL, LLA, LAA, AAA). Reconocen que para los casos L, A, LL, LA, AA se pueden construir infinitos triángulos tanto en el plano como en la esfera. Reconocen que para los casos LLL, LLA, LAA se puede construir solo un triángulo tanto en el plano como en la esfera. Establecen que el tercer lado de un triángulo esférico no puede ser mayor	**Inexistencia de paralelismo** [E]. Segmentos como **elemento compositor de un polígono** [P, E]. Tres o más segmentos **forman una región cerrada** [P]. Dos o más segmentos **forman una región cerrada** [P]. Segmentos como el **argumento para nombrar** otra noción geométrica [E]. Es un **argumento** (por ser congruentes) **en propiedades** de un polígono [E]. La **semicircunferencia máxima como el lado del polígono** de dos lados [E]. El **segmento como una cantidad estática (**siendo el lado de un biángulo). Rectas como **referencia para observar el comportamiento de arcos** [E]. Relación **entre rectas – divergencia/convergencia** [E]. Recta como el **límite de un comportamiento** [E]. Recta como el **cambio de un comportamiento** [E]. Recta como **unidad de medida** [E]. Recta divisible [E]. Segmento de recta que no representa la distancia menor entre dos puntos-**segmentos de recta que no son geodésicas** [E].

	¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
		que la suma de los otros dos (desigualdad triangular). Reconocen que en la esfera la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados y no constante.	
		Ángulo plano y esférico	
	P-Relaciones entre ángulo (complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice).	Clasifican las relaciones de dos rectas planas (en un mismo plano: paralelas, oblicuas y perpendiculares; en planos diferentes: alabeadas). Reconocen propiedades en la relación de dos rectas planas (pueden o no intersecarse; si se intersecan solo se intersecan en un punto; la existencia del paralelismo, oblicuidad y perpendicularidad). Establecen propiedades del ángulo plano. Reconocen propiedades del biángulo (polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices; los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima; sus ángulos internos son congruentes).	**Ángulo como relación estática** [P]. **Ángulo como cualidad estática** por su forma [P]. **Ángulo como una cantidad estática** [P]. **Dos rectas formas cuatro ángulos en el plano** [P]. **Una recta y una semirrecta forman tres ángulos** en el plano [P]. **Dos semirrectas forman dos ángulos en el plano** [P]. **Ángulo como parte de un círculo** [P]. Ángulo como **elemento compositor de un polígono** [P, E]. **Ángulos congruentes como propiedad** de un polígono [E]. **Ángulos condicionados** [E]. Ángulo como **argumento en el nombre** de un polígono [E]. Ángulo **como cantidad dinámica** porque pueden cambiar juntos de medida [E]. Ángulo como **criterio de clasificación** de polígonos [P, E]. **Relaciones de ángulos-adyacentes** (complementarios, suplementarios) y opuestos por el vértice [P, E]. **Relaciones de dependencia entre ángulos y polígonos** [E]. **Relaciones entre ángulos como criterio de clasificación** de polígonos [E]. Ángulo nulo, entre dos rectas que **no definen un polígono** [E]. Ángulo llano, **divide a la esfera en dos semiesfera** [E].
	P-Relaciones entre polígonos (congruencia y semejanza). E- Relaciones entre polígonos (congruencia).	Establecen una estrategia de construcción geométrica para cada caso en el plano (L, A, LL, LA, AA, LLL, LLA, LAA, AAA). Reconocen que para los casos L, A, LL, LA, AA se pueden construir infinitos triángulos tanto en el plano como en la esfera. Reconocen que para los casos LLL, LLA, LAA se puede construir solo un triángulo tanto en el plano como en la esfera. Reconocen que para el caso AAA, hay una diferencia entre el plano y la esfera, en el plano se pueden construir infinitos triángulos y en la esfera solo uno.	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionado** (por la medida de los ángulos internos de un triángulo plano) [P y E]. Ángulo **condicionador** (cambian la medida del lado opuesto) [P y E].

		¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
			Reconocen que, si dos triángulos comparten elementos, como en los casos en los que solo se podía construir un único triángulo, ambos triángulos son congruentes.	Los triángulos **solo pueden tener un ángulo recto** [P]. Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. Medida del ángulo como **criterio de clasificación** [P y E]. Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Ángulo como una **cualidad dinámica** por su forma en movimiento [P y E]. Construyen un **triángulo obtusángulo-rectángulo** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E]. Construyen un **triángulo trirrectángulo** [E]. Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – perpendicularidad [P y E] El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E]. **Relacion entre ángulos – complementarios** [P y E]. **Dos ángulos fijos fijan el tercer ángulo** del triángulo plano [P]. **Dos ángulos fijos no fijan el tercer ángulo** del triángulo esférico [E]. **Tres ángulos esféricos fijos construyen un único triángulo** [E].
		E-Teoría de la polaridad (relación recta – polo o distancias - polo).	Relacionan rectas esféricas perpendiculares. Establecen propiedades del ángulo esférico. Generalizan la relación de que todas las rectas esféricas perpendiculares a una recta dada se intersecan en los polos de la recta dada [teoría de la polaridad]. Establecen una estrategia de construcción geométrica para cada caso tanto en el plano como en la esfera (L, A, LL, LA, AA, LLL, LLA, LAA, AAA). Reconocen que para los casos L, A, LL, LA, AA se pueden construir infinitos triángulos tanto en el plano como en la esfera. Reconocen que para los casos LLL, LLA, LAA se puede construir solo un	Ángulo como una **cantidad estática** [P y E]. Ángulo como una **relación estática** [P y E]. Ángulo como una **cualidad estática** por su forma [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Ángulo **condicionado** (fijo) [P y E]. Ángulo **condicionado** (por la medida de los ángulos internos de un triángulo plano) [P y E]. Ángulo **condicionador** (cambian la medida del lado opuesto) [P y E]. Los triángulos **solo pueden tener un ángulo recto** [P].

		¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
			triángulo tanto en el plano como en la esfera. Reconocer que para el caso AAA, hay una diferencia entre el plano y la esfera, en el plano se pueden construir infinitos triángulos y en la esfera solo uno. Establecer que en la esfera se tiene un nuevo criterio de congruencia de triángulo, AAA.	Los **ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados** [P]. Los **ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante** [E]. Medida del ángulo como **criterio de clasificación** [P y E]. Ángulo **extensible** [P y E]. Ángulo **reducible** [P y E]. Ángulo como una **cantidad dinámica** [P y E]. Ángulo como una **relación dinámica** [P y E]. Ángulo como una **cualidad dinámica** por su forma en movimiento [P y E]. Construyen un **triángulo obtusángulo-rectángulo** [E]. Construyen un **triángulo birrectángulo** [E]. Construyen un **triángulo trirrectángulo** [E]. Ángulo como **vínculo entre relaciones de recta** – perpendicularidad [P y E] El **ángulo recto como identificador del polo de un segmento** [E]. El **ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo** [E]. **Relacion entre ángulos – complementarios** [P y E]. **Dos ángulos fijos fijan el tercer ángulo** del triángulo plano [P]. **Dos ángulos fijos no fijan el tercer ángulo** del triángulo esférico [E]. **Tres ángulos esféricos fijos construyen un único triángulo** [E].
		E- Relaciones entre ángulo (complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice, opuestos por la abertura [internos en el biángulo])	Relacionan rectas esféricas perpendiculares. Reconocen propiedades en la relación de dos rectas esféricas (siempre se intersecan en dos puntos; se relacionan divergiendo y convergiendo; la existencia de la perpendicularidad y la oblicuidad; y la inexistencia del paralelismo). Establecen propiedades del ángulo esférico. Reconocen propiedades del biángulo (polígono de dos lados, dos ángulos y dos vértices; los lados del biángulo son constantes, mide una semicircunferencia máxima; sus ángulos internos son congruentes). Clasifican los biángulos (según su área: región mayor y región menor; según se relación con otro biángulos: biángulos	**Ángulo como relación estática** [P, E]. **Ángulo como cualidad estática** por su forma [P, E]. Ángulo **como una cantidad estática** [E]. **Dos rectas forman ocho ángulos** [E]. **Ángulos opuestos por el vértice por su posición** [P, E]. **Ángulos regionales** son congruentes por compartir los mismos dos lados y la misma abertura (la misma región de la superficie) [E]. Ángulo como **elemento compositor de un polígono** [E]. **Ángulos duplicado** por la cantidad de intersecciones[E]. Ángulo como **elemento compositor de un polígono** [P, E]. **Ángulos congruentes como propiedad** de un polígono [E].

		¿Cómo se presenta esa noción matemática (describir como los datos que justifican la práctica aluden a la noción matemática)?	¿Cómo interactúan las y los participantes con esa noción matemática (describir lo que hacen en/con la noción matemática)?	¿Qué papel desempeña la noción matemática en el desarrollo de las tareas?
			opuestos por el vértice, complementarios y suplementarios; según la medida de sus ángulos internos: agudos, rectos, obtusos y cóncavos).	**Ángulos condicionados** [E]. Ángulo como **argumento en el nombre** de un polígono [E]. Ángulo **como cantidad dinámica** porque pueden cambiar juntos de medida [E]. Ángulo como **criterio de clasificación** de polígonos [P, E]. **Relaciones de ángulos-adyacentes** (complementarios, suplementarios) y opuestos por el vértice [P, E]. **Relaciones de dependencia entre ángulos y polígonos** [E]. **Relaciones entre ángulos como criterio de clasificación** de polígonos [E]. Ángulo nulo, entre dos rectas que **no definen un polígono** [E]. Ángulo llano, **divide a la esfera en dos semiesfera** [E].

Los usos de la recta, el segmento y el ángulo, tanto en el plano como en la esfera, en la evolución de las prácticas matemáticas (acciones, actividades y psc), favorecen la caracterización de esas nociones geométricas que la población participante puso en juego en el desarrollo de las tareas de problematización. Dicha caracterización muestra la presentación de generalizaciones euclidianas, la confrontación que vivió la población participante al reconocer su funcionalidad o su limitación en la superficie de la esfera y el proceso de resignificación que viven al modificar esas generalizaciones (volviéndolas más específica o más generales) e identificar nuevas propiedades de las nociones, particularmente para la geometría esférica.

La línea recta

Sus usos sociales: aquellos marcados en color verde son usos que se mantienen en el plano y en la esfera; los marcados en color azul son aquellos que sufren cambios entre el plano y la esfera; y los marcados en color naranja son usos propios en cada geometría.

Línea recta	
Plano	**Esfera**
Recta desde dos direcciones (sentidos), una opuesta a la otra [P, E].	Recta desde dos direcciones (sentidos), una opuesta a la otra [P, E].
Recta extensible [P,E].	Recta extensible [P,E].
Recta como divisor de la superficie [P, E].	Recta como divisor de la superficie [P, E].
Recta como eje de simetría [P, E].	Recta como eje de simetría [P, E].
Rectas como elementos que componen un ángulo [P, E].	Rectas como elementos que componen un ángulo [P, E].
Recta desde el ángulo llano (en todos sus puntos, si ese punto es el vértice, el ángulo entre los dos lados es siempre de 180 grados) [P, E].	Recta desde el ángulo llano (en todos sus puntos, si ese punto es el vértice, el ángulo entre los dos lados es siempre de 180 grados) [P, E].
Recta como argumento en el establecimiento de propiedades [P, E].	Recta como argumento en el establecimiento de propiedades [P, E].

Línea recta	
Plano	**Esfera**
Recta infinita [P].	Recta finita-ilimitada [E].
Tres rectas en el plano forman un triángulo [P].	Tres rectas esféricas forman dos triángulos [E].
Recta compuesta por infinitos puntos sucesivos colineales y segmentos [P].	Recta compuesta por puntos sucesivos colineales y segmentos [E].
Relación entre rectas – oblicuidad/paralelismo/perpendicularidad [P].	Relación entre rectas – oblicuidad/perpendicularidad [E].
Dos rectas que se intersecan lo hacen en un punto [P].	Dos rectas siempre se intersecan y lo hacen en dos punto [E].
Dos rectas formas cuatro ángulos en el plano [P].	Dos rectas formas ocho ángulos en la esfera [E].
Recta como eje de giro [P].	
Las rectas que no se intersecan son equidistantes [P].	
	Recta como una relación dinámica [E].
	Las interseccionesentre dos rectas son congruentes (los cuatro ángulos de una intersección son congruentes respectivamen con los cuatro ángulo de la otra intersección) [E].
	Recta como una relación entre dos puntos y una distancia [E].
	Recta como una circunferencia máxima [E].
	Recta como casos en la generalización de propiedades [E].
	Recta como parte de un sistema de referencia (coordenadas geográficas) [E].
	Recta como referencia de paralelismo de circunferencias esféricas [E].
	Inexistencia de paralelismo [E].
	Rectas como referencia para observar el comportamiento de arcos [E].
	Relación entre rectas – divergencia/convergencia [E].
	Recta como el límite de un comportamiento [E].
	Recta como el cambio de un comportamiento [E].
	Recta como unidad de medida [E].
	Recta divisible [E].

Su caracterización:

La recta plana está compuesta por infinitos puntos sucesivos colineales (infinito actual[1]). La colinealidad se asocia con la rectitud, y esta se entiende cuando una línea no cambia de dirección y se extiende infinitamente (infinito potencial) en dos direcciones, una opuesta a la otra (sentidos, según Euclides (1991) y Bueche y Hatch (2007)) o como que en todos sus puntos el ángulo entre un lado y el otro es siempre de 180 grados. *Una recta plana* divide al plano en dos semiplanos, por lo que puede entenderse como un eje de simetría. *Dos rectas planas* pueden o no intersecarse; si no lo hacen, esas dos rectas son paralelas, equidistantes; si lo hacen, se intersecan en un único punto, formando cuatro ángulos, y pueden ser oblicuas (los ángulos son diferentes a 90 grados) o

[1] Con base en D´Amore, et al. (2006), Mena-Lorca, et al. (2015), se reconoce la diferencia entre el infinitos como objeto (infinito actual) desde una concepción cardinal, propuesta por Cantor, de sus elementos, por ejemplo los puntos en figuras limitadas como un segmento, un cuadrado o un círculo; y el infinito como proceso (infinito potencial), como la recta plana con la posiblidad de prolongarse indefinidamente. Dado que el infinitos "se ve más como un proceso y no como un objeto, un modo de hacer y de decir, más que algo sobre el cual operar" (D´Amore, et al., 2006, p. 26), su reconocimiento como cardinalidad favorece la concepción del infinito actual y no solo el potencial.

perpendiculares (los ángulos son de 90 grados). *Tres rectas planas* que se intersecan forman un triángulo, el polígono de menor cantidad de lados en el plano.

La recta esférica es una de las circunferencias máximas que se pueden trazar en la esfera, por lo que puede entenderse como la relación entre dos polos (centros) y una distancia (radio, igual a ¼ de circunferencia máxima). Está compuesta por (infinitos para alguno [A] y finitos para otros [B y C][2]) puntos sucesivos colineales. La colinealidad se asocia con la rectitud, y esta se entiende cuando una línea no cambia de dirección y se extiende ilimitadamente[3] en dos direcciones, una opuesta a la otra (sentidos, según Euclides (1991) y Bueche y Hatch (2007)) o como que en todos sus puntos el ángulo entre un lado y el otro es siempre de 180 grados. *Una recta esférica* divide a la superficie esférica en dos hemisferios, por lo que puede entenderse como un eje de simetría. *Dos rectas esféricas* siempre se intersecan (inexistencia de paralelismo) y lo hacen en dos puntos (configurando un polígono de dos lados, el polígono de menor cantidad de lados en la esfera), formando ocho ángulos, por lo que pueden ser oblicuas (los ángulos son diferentes a 90 grados) o perpendiculares (los ángulos son de 90 grados); además, esas dos rectas desde una de sus intersecciones inician divergiendo una de la otra hasta ¼ de circunferencia máxima, ahí hacen un cambio de comportamiento para iniciar a converger y volver a intersecarse a ½ de circunferencia máxima o semicircunferencia máxima [relación divergencia-convergencia][4]; asociada a estos comportamientos, la recta esférica puede entenderse como unidad de medida. Por otro lado, las intersecciones entre dos rectas esféricas son congruentes (los cuatro ángulos de una intersección son congruentes respectivamente con los cuatro ángulos de la otra intersección). *Tres rectas esféricas* forman dos triángulos, opuestos y congruentes. En dependencia del desarrollo de tareas, las rectas esféricas pueden ser casos en la generalización de propiedades, partes de sistemas de referencia, referencia en el paralelismo de círculos esféricos, y argumentos en el establecimiento de propiedades geométricas.

El segmento

Sus usos sociales: aquellos marcados en color verde son usos que se mantienen en el plano y en la esfera; los marcados en color azul son aquellos que sufren cambios entre el plano y la esfera; y los marcados en color naranja son usos propios en cada geometría.

[2] Hay una comparación entre el infinito potencial de la recta plana con el infinito actual de la recta esférica, por lo que dos de los equipos la caracteriza como finita a pesar de que los tres equipos reconocen que es ilimitada.

[3] Lo ilimitado se entiende como la posibilidad de prolongarse sobre la misma representación, la circunferencia máxima, por lo que se pone en juego el infinito potencial sobre una representación limitada (infito actual).

[4] De las interpretaciones a las relaciones de rectas en el plano, las rectas equidistantes pueden entenderse como aquellas que no convergen ni divergen; y las rectas no equidistantes, convergen en un sentido y divergen en el opuesto [esta es una de las proposiciones lógicamente equivalente al V postulado de Euclides que se presenta en Euclides (1991)]. Sin embargo, en la esfera, siempre divergen y convergen en el mismo sentido (psc: relación divergencia-convergencia).

El segmento	
Plano	**Esfera**
El segmento tiene extremos [P y E].	El segmento tiene extremos [P y E].
Segmento compuesto por puntos y segmentos [P y E].	Segmento compuesto por puntos y segmentos [P y E].
Segmento extensible [P y E].	Segmento extensible [P y E].
Segmento reducible [P y E].	Segmento reducible [P y E].
Segmento como una cantidad dinámica [P y E].	Segmento como una cantidad dinámica [P y E].
Segmento como una cantidad estática [P y E].	Segmento como una cantidad estática [P y E].
Segmento como una cualidad dinámica [P y E].	Segmento como una cualidad dinámica [P y E].
Segmento como una cualidad estática [P y E].	Segmento como una cualidad estática [P y E].
Segmento como la distancia más corta entre dos puntos – geodésica [P y E].	Segmento como la distancia más corta entre dos puntos – geodésica [P y E].
Segmento como elemento compositor (ángulos, polígonos) [P, E].	Segmento como elemento compositor (ángulos, polígonos) [P, E].
Relación entre segmentos - perpendicularidad, oblicuidad [P y E].	Relación entre segmentos - perpendicularidad, oblicuidad [P y E].
Relación entre segmentos – desigualdad triangular [P y E].	Relación entre segmentos – desigualdad triangular [P y E].
Segmento como una cuerda tensa entre dos puntos [P y E].	Segmento como una cuerda tensa entre dos puntos [P y E].
Segmento condicionador (fija los ángulos) [P y E].	Segmento condicionador (fija los ángulos) [P y E].
Es un argumento (por ser congruentes) en propiedades de un polígono [P, E].	Es un argumento (por ser congruentes) en propiedades de un polígono [P, E].
Segmento condicionado (fijo, por la variación el ángulo opuesto, no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros, por ser la hipotenusa debe ser más grande que los otros dos) [P].	Segmento condicionado (fijo, por la variación el ángulo opuesto, no puede ser mayor o igual que la suma de los dos otros) [E].
Dos puntos definen un único segmento [P].	Dos puntos no opuestos definen dos segmentos [E]. Dos puntos opuestos definen infinitos segmentos [E].
Tres o más segmentos forman una región cerrada [P].	Dos o más segmentos forman una región cerrada [E].
	Segmento como un relación dinámica [E].
	Segmento como un relación estática [E].
	Segmentos que no son geodésicas [E].
	Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima como catetos e hipotesusas de triángulos rectángulos [E].
	Cuadrante o cuarto de circunferencia máxima como radio de círcunferencia máxima [E].
	Segmentos como el argumento para nombrar otra noción geométrica [E].
	La semicircunferencia máxima como el lado, constante, del polígono de dos lados [E].

Su caracterización:

El segmento plano es un fragmento de recta, por lo que tiene extremos definidos, está compuesto por puntos y otros segmentos y puede extenderse o reducirse. De ahí que el segmento puede entenderse como una cantidad estática y dinámica por su medida fija o cambiante y como una cualidad estática y dinámica por su posición y su posibilidad de cambios en posición[5]. En las tareas de problematización se presentó y admitió que

[5] Haciendo una analogía con las interpretaciones de ángulo que presenta Aristóteles (384-322 a.C.), como cualidad, por su forma; relación, por su definición; y cantidad, por su medida (Matos, 1990); además, por sus propiedades estánticas y dinámicas que agrega (Moore, 2013; Rotaeche y Montiel-Espinosa, 2017); se reconoce al segmento plano como una cualidad y cantidad estáticas y dinámicas.

una cuerda tensa en el plano representa el segmento o camino más corto entre dos puntos[6]. En el plano, todos los segmentos representan el camino de menor distancia entre dos puntos, es decir que, dos puntos definen un único segmento, la geodésica. Al igual que la recta, se pueden tener segmentos paralelos, perpendiculares y oblicuos; pero para lograr una región del plano cerrada se requieren por lo menos tres segmentos, por lo que el triángulo es el polígono de menor cantidad de lados en el plano. En un triángulo, los lados (segmentos) cumplen la propiedad de que la suma de dos de ellos, cualquiera, debe ser mayor que el tercero. En dependencia del desarrollo de tareas geométricas los segmentos pueden ser condicionados (por ejemplo: si tienen una medida fija; si en un triángulo varían dependiendo de la alteración del ángulo opuesto; en un triángulo un lado no puede ser mayor o igual que la suma de los otros dos; y en un triángulo rectángulo, por ser la hipotenusa debe ser mayor que cualquiera de los otros dos), condicionadores (por ejemplo: fijar la medida de ángulos u otros segmentos y tipificar polígonos), argumentos en propiedades geométricas y elementos compositores de ángulos y polígonos.

El segmento esférico es un fragmento de recta, por lo que tiene extremos definidos, está compuesto por puntos y otros segmentos y puede extenderse o reducirse. De ahí que el segmento puede entenderse como una cantidad estática y dinámica por su medida fija o cambiante, como una cualidad estática y dinámica por su posición y su posibilidad de cambios en posición, y como una relación estática y dinámica por caracterizarse como un arco de circunferencia máxima[7]. En las tareas de problematización se presentó y admitió que una cuerda tensa en la esfera representa un segmento; sin embargo, entre dos puntos no puesto hay dos segmentos de recta y solo uno de ellos representa la menor distancia entre esos puntos, es decir, solo uno de ellos es la geodésica, por otro lado, si los puntos son opuestos solo hay geodésicas entre ellos, y son infinitas, que miden una semicircunferencia máxima. Al igual que la recta, se pueden tener segmentos perpendiculares y oblicuos; pero para lograr una región de la superficie esférica cerrada se requieren por lo menos dos segmentos (semicircunferencias), por lo que, en la geometría esférica, el biángulo o lúnula es el polígono de menor cantidad de lados. En un triángulo esférico, también se cumple la propiedad de que la suma de dos de sus lados, cualquiera, debe ser mayor que el tercero. En dependencia del desarrollo de tareas geométricas los segmentos pueden ser condicionados (por ejemplo: si tienen una medida fija; si en un triángulo varían dependiendo de la alteración del ángulo opuesto; si dos segmentos de un triángulo son perpendiculares al tercero, miden un cuadrante o un ¼ de

[6] Buscando la comprensión del «*yace por igual respecto de los puntos que están están en ella»* que presenta Euclides para definir la línea recta, los griego se formaron tres representaciones básicas "la de un hilo tenso, la de un rayo de luz, la de un eje o lugar de los puntos que se mantienen inmóviles en un cuerpo fusiforme suspendido por ambos extremos" (Euclides, 1991, p. 190). Por ello, se propuso a la población participante la cuerda tensa para representar segmentos de recta; logrando que la admieran como una representación que mantiene la rectitud de la recta y el desplazamiento más corto entre dos puntos, en ambas superficies.

[7] Desde la psc, teoría de la polaridad, la recta esférica puede entenderse como la relación entre un polo (centro) y una distancia (radio o cuarto de circunferencia máxima), como cualquier recta perpendicular a un segmento (relación dinámica) pasa por el polo de la recta a la que pertenece ese segmento, el segmento de recta esférica puede entenderse como una relación estática y dinámica.

circunferencia máxima; los radios de circunferencias máximas miden un cuadrante; la semicircunferencia máxima es la medida de la geodésica de puntos opuestos, la mayor geodésica en la esfera, y la medida, constante, del lado del biángulo o lúnula), condicionadores (por ejemplo: fijar la medida de ángulos u otros segmentos y tipificar polígonos), el cuadrante puede ser tanto un cateto como la hipotenusa de un triángulo birrectángulo y cualquier segmento puede ser el argumentos en el establecimiento de propiedades geométricas de ángulos o polígonos.

El ángulo

Sus usos sociales: aquellos marcados en color verde son usos que se mantienen en el plano y en la esfera; los marcados en color azul son aquellos que sufren cambios entre el plano y la esfera; y los marcados en color naranja son usos propios en cada geometría.

El ángulo	
Plano	**Esfera**
Ángulo como una cantidad dinámica [P y E].	Ángulo como una cantidad dinámica [P y E].
Ángulo como una cantidad estática [P y E].	Ángulo como una cantidad estática [P y E].
Ángulo como una relación estática [P y E].	Ángulo como una relación estática [P y E].
Ángulo como una relación dinámica [P y E].	Ángulo como una relación dinámica [P y E].
Ángulo como una cualidad estática por su forma [P y E].	Ángulo como una cualidad estática por su forma [P y E].
Ángulo como una cualidad dinámica por su forma en movimiento [P y E].	Ángulo como una cualidad dinámica por su forma en movimiento [P y E].
Ángulo extensible [P y E].	Ángulo extensible [P y E].
Ángulo reducible [P y E].	Ángulo reducible [P y E].
Ángulo compuesto por ángulos [P y E].	Ángulo compuesto por ángulos [P y E].
Ángulo compuesto por dos rectas que se intersecan en un punto [P y E].	Ángulo compuesto por dos rectas que se intersecan en un punto [P y E].
El ángulo como elemento compositor de un polígono [P y E].	El ángulo como elemento compositor de un polígono [P y E].
Medida del ángulo como criterio de clasificación [P y E].	Medida del ángulo como criterio de clasificación [P y E].
El ángulo como argumento en la nomeclatura, clasificación y propiedades de polígonos [P y E].	El ángulo como argumento en la nomeclatura y clasificación y propiedades de polígonos [P y E].
Ángulo como vínculo entre relaciones de recta – perpendicularidad y oblicuidad [P y E].	Ángulo como vínculo entre relaciones de recta – perpendicularidad y oblicuidad [P y E].
El ángulo recto como referente de medida de ángulo [P y E].	El ángulo recto como referente de medida de ángulos [P y E].
Ángulo llano (180 grados) como referente de medida de ángulos [P y E].	Ángulo llano (180 grados) como referente de medida de ángulos [P y E].
Los ángulos internos de un triángulo plano suman 180 grados [P].	Los ángulos internos de un triángulo esférico suman más de 180 grados y no es constante [E].
Dos ángulos fijos fijan el tercer ángulo del triángulo plano [P].	Dos ángulos fijos no fijan el tercer ángulo del triángulo esférico [E].
Tres ángulo fijos construyen infinitos triángulos semejantes [P]	Tres ángulos esféricos fijos construyen un único triángulo [E].
Los triángulos solo pueden tener un ángulo recto [P].	Los triángulos pueden tener uno, dos o tres ángulos rectos [P].
Relacion entre ángulos – complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice [P].	Relacion entre ángulos – complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice, regionales (comparte la misma región de la superficie) [E].
Ángulo condicionado (fijo, por la suma de los ángulos internos de un triángulo plano) [P].	Ángulo condicionado (fijo) [P].
Ángulo condicionador (cambian la medida del segmento opuesto, condicionan la medida de otro ángulos de un triángulo) [P y E].	Ángulo condicionador (cambian la medida del segmento opuesto) [P y E].
	Construyen un triángulo birrectángulo [E].
	Construyen un triángulo trirrectángulo [E].
	Construyen un triángulo obtusángulo-rectángulo [E].
	El ángulo recto como identificador del polo de un segmento [E].

El ángulo	
Plano	**Esfera**
	El ángulo recto como identificador del radio de un círculo máximo [E].
	Ángulos duplicado por la cantidad de intersecciones[E].

Su caracterización:

El ángulo plano puede caracterizarse desde la intersección de dos rectas, semirrectas o segmentos (y combinaciones de ellas) y su abertura puede extenderse o reducirse; por lo que, pueden entenderse como una relación, cantidad y cualidad estática y dinámica (Matos, 1990; Moore, 2013; Rotaeche y Montiel-Espinosa, 2017). El ángulo puede presentarse como una noción compuesta, por dos rectas que se intersecan o por otros ángulos; independiente, por su forma; y como elemento compositor de otros ángulos o polígonos. En el plano los ángulos pueden relacionarse formando ángulos complementarios, suplementarios y opuestos por el vértice, es decir que, son el vínculo en las relaciones de rectas (perpendicularidad y oblicuidad). De ahí que, el ángulo recto y el ángulo llano son referentes de medida de ángulos. En los triángulos son el argumento en el establecimiento de varias propiedades, por ejemplo: la suma de los ángulos internos es de 180 grados, dos ángulos fijos limitan o fijan el tercer ángulo, solo pueden tener un ángulo recto, su medida constituye un criterio de clasificación, y con tres ángulos fijos se pueden construir infinitos triángulos semejantes. En dependencia del desarrollo de tareas geométricas los ángulos pueden ser condicionados (si tienen una medida fija, o en las propiedades en los triángulos antes mencionadas), condicionadores (fijar la medida de otros ángulos y segmentos, en un triángulo con su variación cambian la medida del segmento opuesto) y argumentos en el establecimiento de propiedades.

El ángulo esférico puede caracterizarse desde la intersección de dos rectas, semirrectas o segmentos (y combinaciones de ellas) y su abertura puede extenderse o reducirse; por lo que, pueden entenderse como una relación, cantidad y cualidad estática y dinámica (Matos, 1990; Moore, 2013; Rotaeche y Montiel-Espinosa, 2017). En ángulo puede presentarse como una noción compuesta, por dos rectas que se intersecan o por otros ángulos; independiente, por su forma; y como elemento compositor de otros ángulos o polígonos. En la esfera los ángulos pueden relacionarse formando ángulos complementarios, suplementarios, opuestos por el vértice y regionales (ángulos que comparten los mismos lados y la misma región de la superficie o ángulos internos de un biángulo), es decir que, son el vínculo en las relaciones de rectas (perpendicularidad, oblicuidad y relación divergencia-convergencia). De ahí que, el ángulo recto y el ángulo llano son referentes de medida de ángulos, y particularmente, el ángulo recto es un localizador del polo de segmentos o rectas y de radios de circunferencias máximas. En los triángulos son el argumento en el establecimiento de varias propiedades, por ejemplo: la suma de los ángulos internos es mayor que 180 grados y no constante, por lo que, dos ángulos fijos no limitan el tercer ángulo; pueden tener uno, dos o tres ángulos rectos, es decir, existen los triángulos rectángulos, birrectángulos y trirectángulos; su medida constituye un criterio de clasificación; y con tres ángulos fijos se puede construir un único triángulo, de ahí que en la esfera se tenga un nuevo criterio de congruencia de triángulos, AAA. En

dependencia del desarrollo de tareas geométricas los ángulos pueden ser condicionados (si tienen una medida fija, o en las propiedades en los triángulos antes mencionadas), condicionadores (fijar la medida de otros ángulos y segmentos, en un triángulo con su variación cambian la medida del segmento opuesto) y argumentos en el establecimiento de propiedades.